GAL II*, Zestaw zadań domowych VII

Data zwrotu: 22 maja 2021, 23:59 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).

Zadanie 1. *Niech L_1 będzie prostą w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ opisaną układem:*

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ 2y - z &= -1 \end{cases}.$$

- *Znajdź parametryzację prostej L_1.*
- *Niech $L_2 = (2,2,2) + \operatorname{lin}((2,3,2))$. Wyznacz równanie płaszczyzny π zawierającej prostą L_2, do której L_1 jest równoległa.*

Zadanie 2. *W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń H zadana jest równaniami:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}.$$

Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie rzutem wzdłuż $\operatorname{lin}((1,0,-1,1),(0,1,1,0))$ na H.

- *Znajdź przeciwobraz $f^{-1}(L)$ prostej $L = (1,0,1,0) + \operatorname{lin}(1,-1,1,1)$.*
- *Znajdź układ równań opisujący obraz $f(K)$ płaszczyzny $K = (1,0,1,0) + \operatorname{lin}((1,1,0,1),(0,0,0,1))$.*

Zadanie 3. *Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykaż, że jeśli f przeprowadza parę prostych skośnych na parę prostych równoległych, to f nie jest różnowartościowe. Podaj przykład takiego przekształcenia.*

Zadanie 4. *Rozstrzygnij czy forma kwadratowa $q : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ dana wzorem*

$$q((x,y,z)) = -6x^2 + \frac{7}{2}y^2 - \frac{25}{7}z^2$$

jest izotropowa, naśladując metodę z końcówki pliku `http://www.math.union.edu/~hatleyj/Capstone.pdf`.

Zadanie 5. *Pokaż, że następujący szereg:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n!)^2 + 1}$$

jest zbieżny w $\mathbb{Q}_p$, dla każdego p pierwszego oraz dla $p = \infty$.