# GAL II*, Zestaw zadań domowych VI

**Data zwrotu: 13 maja 2021, 10:14 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).**

W tej serii udowodnimy zasadnicze twierdzenie algebry (ZTA), więc w rozwiązaniach nie wolno używać żadnego argumentu czy twierdzenia, który z niego korzysta (trzeba pamiętać które to fakty). Można używać faktu, że wielomiany rzeczywiste nieparzystego stopnia mają pierwiastek rzeczywisty oraz wolno rozwiązywać równania kwadratowe. Nasz cel: wykazać, że każda macierz $M \in M_n(\mathbb{C})$ ma wektor własny.

**Zadanie 1.** *Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą, zaś $K$ niech będzie takim ciałem, że dla każdej przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$ takiej, że $m \nmid \dim V$, każdy $\sigma \in \mathrm{End}(V)$ ma wektor własny*[1]. *Rozważmy dowolną parę przemiennych endomorfizmów $\phi, \psi$ przestrzeni $V$ nad ciałem $K$ spełniającej warunek $m \nmid \dim V$. Niech $\lambda \in K$ będzie wartością własną endomorfizmu $\phi$ i niech*

$$U = \mathrm{im}(\phi - \lambda\,\mathrm{id}), \quad V = \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id}).$$

*Wykaż, że podprzestrzenie $U, V$ są $\psi$-niezmiennicze. Wykaż, przez indukcję po (dozwolonych) $\dim V$, że $\phi$, $\psi$ mają wspólny wektor własny, tzn. istnieje $0 \neq u \in V$ oraz $a, b \in K$ takie, że $\phi(u) = au, \psi(u) = bu$.*

**Zadanie 2.** *Rozważamy $M_n(\mathbb{C})$ jako przestrzeń wymiaru $2n^2$ nad $\mathbb{R}$. Wykaż, że podprzestrzeń $M_n(\mathbb{C})$ złożona z macierzy hermitowskich (tzn. $M \in H_n \Leftrightarrow M = M^* := \overline{M^T}$), ozn $H_n$, ma wymiar $n^2$ (nad $\mathbb{R}$).*

**Zadanie 3.** *Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pokaż, że następujące odwzorowania są przemiennymi endomorfizmami przestrzeni macierzy hermitowskich $H_n$ (uzasadnij w szczególności, że obrazy są w $H_n$):*

$$L_1(B) = \frac{AB + BA^*}{2}, \quad L_2(B) = \frac{AB - BA^*}{2i}, \quad \textit{gdzie } B \in H_n.$$

*Wywnioskuj stąd, że dla $2 \nmid n$ każda macierz w $A \in M_n(\mathbb{C})$ ma wektor własny w $\mathbb{C}^n$ (wsk.: $AB = ...$).*

**Zadanie 4.** *Niech $S_n$ będzie $\mathbb{C}$-podprzestrzenią macierzy symetrycznych w $M_n(\mathbb{C})$ (tzn. $M \in S_n \Leftrightarrow M = M^T$). Wykaż, że $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$. Wykaż, że następujące odwzorowania są przemiennymi endomorfizmami $S_n$ (jako przestrzeni nad $\mathbb{C}$):*

$$M_1(B) = AB + BA^T, \quad M_2(B) = ABA^T, \quad \textit{gdzie } B \in S_n.$$

*Wykaż, że jeśli dla pewnej $B \in S_n$ mamy $M_1(B) = \lambda B$ oraz $M_2(B) = \mu B$, gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, to*

$$(A^2 - \lambda A + \mu)B = 0.$$

**Zadanie 5.** *Udowodnij, poprzez indukcję ze względu na wykładnik 2-adyczny liczby $n$, że każda macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ ma wektor własny. Jeśli nie rozwiązałeś któregoś z poprzednich zadań, po prostu pokaż jak postawione w nich tezy implikują poprawność tezy. W jaki sposób dostajemy stąd prawdziwość ZTA?*

---

[1] Założenie nie działa przy żadnym $m > 1$ dla $K = \mathbb{Q}$, ale działa dla $m = 2$ przy $K = \mathbb{R}$.