GAL II*, Zestaw zadań domowych V

Data zwrotu: 6 maja 2021, 10:14 (Moodle:

https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).

Zadanie 1. *W przestrzeni unitarnej* $\mathbb{C}^3$ *z formą hermitowską* $\langle | \rangle$ *daną w bazie standardowej macierzą*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 0 & -2 \\ 1+i & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

znajdź $\mathrm{lin}((i, 1, -1), (1-2i, -i, 3))^{\perp}$. *Wyznacz macierz unitarną* U *taką, że* $\overline{U^T}AU$ *jest diagonalna.*

Zadanie 2. *Znajdź wartości osobliwe oraz wartości własne macierzy* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, *przy czym:* $a_{i1} = a_{1j} = 1$, *dla* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_{ii} = -1$, *dla* $i > 1$ *oraz* $a_{kl} = 0$ *w pozostałych przypadkach, czyli:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. *Niech* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ *będą nieujemnie określone.*

- *Pokaż, że wartości własne* AB *oraz* BA *są wszystkie nieujemne.*
- *Pokaż, że* $tr\sqrt{AB^2A} = tr\sqrt{BA^2B}$.
- *Pokaż, że* $tr(AB) \leqslant \frac{1}{4}(tr(A) + tr(B))^2$.

Wskazówka: twierdzenie spektralne, pierwiastki i czasami jednakowe wartości własne.

Zadanie 4. *Wyznacz rzędy i sygnatury następujących form kwadratowych na* $\mathbb{R}^n$ *(wskazówka – Lagrange):*

$$q_1(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \min\{i, j\} x_i x_j, \quad q_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \max\{i, j\} x_i x_j.$$

Zadanie 5. *Niech* G *będzie skończonym nieskierowanym grafem prostym o wierzchołkach* $1, \dots, n$ *oraz niech* $R_G = (r_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *będzie macierzą symetryczną, gdzie* r_{ij} *oznacza liczbę krawędzi pomiędzy wierzchołkiem* i *oraz* j *w grafie* G. *Niech* $A_G = 2I - R_G$. *Graf* G *nazwiemy grafem Dynkina, jeśli macierz* A_G *jest dodatnio określona. Poniżej jest kilka grafów, których wierzchołki (i łączące je krawędzie) oznaczono na czarno:* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 *(indeks to liczba wierzchołków). Pokaż, że jeśli* G *jest jednym z tych grafów, wówczas macierz* A_G *jest dodatnio określona. Pokaż dalej, że jeśli do każdego* G *dodamy biały wierzchołek i odpowiednie krawędzie (jak na rysunku) uzyskując graf* $\widetilde{G}$, *wówczas* $\det(A_{\widetilde{G}}) = 0$.