GAL II*, Zestaw zadań domowych IV

Data zwrotu: 27 kwietnia 2021, 12:14 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).

Zadanie 1. *Niech W będzie podprzestrzenią w $(\mathbb{R}^4, \langle,\rangle_{st})$ opisaną przez układ równań:*

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0.$$

(a) Wyznacz wzór opisujący symetrię prostopadłą względem W,

(b) Wyznacz obraz wektora $(1,1,1,1)$ w symetrii prostopadłej względem W.

Zadanie 2. *Izometria ϕ trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle_{st})$ dana jest w bazie standardowej macierzą:*

$$-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przedstaw ϕ jako złożenie obrotu (wyznacz $\pm$kąt obrotu oraz oś obrotu) i symetrii prostopadłej.

Zadanie 3. *Niech $(V, \langle,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Pokaż, że:*

(a) każda bijekcja $f : V \to V$ zachowująca iloczyn skalarny, tzn. $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle f(\alpha), f(\beta)\rangle$, dla $\alpha,\beta \in V$, oraz mająca własność $f(0) = 0$ jest przekształceniem liniowym,

(b) każdy $\phi \in End(V)$ zachowujący prostopadłość tzn. $\langle\alpha,\beta\rangle = 0 \Rightarrow \langle\phi(\alpha),\phi(\beta)\rangle = 0$, dla $\alpha,\beta \in V$, jest postaci $\phi = a \cdot h$, gdzie h jest pewną izometrią liniową oraz $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. *Załóżmy, że $(V, \langle,\rangle) \neq 0$ jest przestrzenią euklidesową. Ciało wartości endomorfizmu $\phi \in End(V)$ definiujemy jako*

$W(\phi) = \{\langle\phi(v), v\rangle : v \in V$ *spełnia* $\|v\| = 1\}$.

Pokaż, że gdy $\phi, \psi \in End(V)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to:

- *zbiór wartości własnych ϕ zawiera się w $W(\phi)$,*
- $W(\lambda\phi) = \lambda W(\phi)$,
- $W(\phi + \psi) \subseteq W(\phi) + W(\psi)$ *oraz* $W(\phi + \lambda id_V) = W(\phi) + \lambda$.

Policz ciała wartości endomorfizmów przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_{st})$ danych macierzami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. *Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle_{st})$ o wartościach własnych $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \lambda_n$. Niech M będzie dowolną k-wymiarową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że można w niej znaleźć wektory x, y o normie 1 takie, że $\langle x, Ax\rangle \leqslant \lambda_k$, oraz $\langle y, Ay\rangle \geqslant \lambda_{n-k}$. Pokaż, że*

$$\lambda_k = \max_{M\subseteq\mathbb{R}^n, \dim M = k} \; \min_{x\in M, \|x\|=1} \langle x, Ax\rangle = \min_{M\subseteq\mathbb{R}^n, \dim M = n-k+1} \; \max_{x\in M, \|x\|=1} \langle x, Ax\rangle.$$