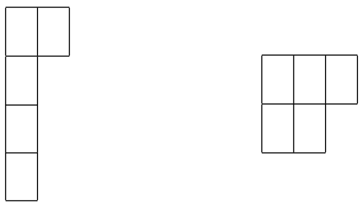
GAL II*, Zestaw zadań domowych III

Data zwrotu: 30 marca 2021, 12:14 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).

Zadanie 1. *Znajdź postać Jordana endomorfizmu* $\phi \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^{10})$ *spełniającego:*

$$\begin{cases} tr\phi = 20 \\ \dim\ker(2\operatorname{id} - \phi)^2 = 5 \\ \dim\ker(2\operatorname{id} - \phi)^4 = 8 \\ \det(3\operatorname{id} - \phi) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 2. *Niech* $\phi \in \operatorname{End}(K^{10})$ *ma wielomian charakterystyczny postaci* $w_\phi(\lambda) = \lambda^5(\lambda - 1)^5$*. Diagramy Younga odpowiadające endomorfizmom nilpotentnym* $\phi|_{V_{[0]}}$ *oraz* $\phi - \operatorname{id}|_{V_{[1]}}$ *mają odpowiednio postać:*



Czy istnieje ψ *takie, że* $\psi^2 = \phi$*? Jeśli tak, to jakie są możliwe postaci Jordana* ψ*?*

Zadanie 3. *Niech* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *będą przemiennymi macierzami rozmiaru* $n \times n$ *nad ciałem algebraicznie domkniętym* F*. Wówczas* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *są jednocześnie triangularyzowalne, tzn. istnieje macierz odwracalna* $C \in M_n(F)$ *taka, że* $C^{-1}AC$ *jest górnotrójkątna, dla* $i = 1, 2, \ldots, k$ *(wskazówka: użyj podejścia przez macierze blokowe, jak w dowodzie triangularyzowalności macierzy kwadratowych nad* $\mathbb{C}$*).*

Zadanie 4. *Niech* F *będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz niech* $A \in M_n(F)$*,* $B \in M_m(F)$*. Rozważmy endomorfizmy* T_A, T_B *przestrzeni liniowej* $V = M_{n\times m}(F)$ *dane wzorami:*

$$T_A(X) = AX, \quad T_B(X) = XB, \qquad \textit{dla każdych } X \in V.$$

- *Pokaż, że* T_A, T_B *są jednocześnie triangularyzowalne.*
- *Pokaż, że jeśli* A, B *nie mają wspólnej wartości własnej, to równanie* $AX - XB = C$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie* $X \in M_{n\times m}(F)$*.*

Zadanie 5. *Niech* K *bedzie algebraicznie domknięte. Przypomnijmy, że dla macierzy* $X \in M_n(K)$ *oraz jej wartości własnej* a *określamy* $q_k(X - aI) = r((X - aI)^{k-1}) - r((X - aI)^k)$*. Niech* $A \in M_{n\times m}(K)$*,* $B \in M_{m\times n}(K)$*. Pokaż, że:*

- *dla każdego* $a \neq 0$ *oraz dla* $k \geqslant 1$ *mamy* $q_k(AB - aI) = q_k(BA - aI)$*,*
- *dla* $k \geqslant 1$ *mamy* $q_k(BA) \geqslant q_{k+1}(AB)$*.*

Uwaga: dla endomorfizmu nilpotentnego ϕ *indeksu* r *ciąg* $(q_1(\phi), \ldots, q_r(\phi))$ *zwany jest charakterystyką Weyra. Jest to jednocześnie podział dualny do podziału wyznaczonego przez diagram Younga związany z postacią Jordana* ϕ*. Jeśli zapiszemy bazę Jordana* ϕ *przyjmując kolejność wektorów wyznaczoną przez podział dualny otrzymujemy tzw. postać kanoniczną Weyra.*