

GAL II*, Zestaw zadań domowych II

Data zwrotu: 23 marca 2021, 12:14 (Moodle:

<https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814>).

Zadanie 1. Wyznacz bazę Jordana endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ danego przy pomocy macierzy:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz ϕ w bazie Jordana.

Zadanie 2. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pokaż, że jeśli $A^3 = A$, to $r(A) = \text{tr} A^2$.

Zadanie 3. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ będą macierzami kwadratowymi o wyrazach całkowitych. Załóżmy, że $\text{NWD}(\det A, \det B) = 1$. Udowodnij, że istnieją macierze $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ takie, że

$$AU + BV = I_n.$$

Zadanie 4. Niech $\phi \in \text{End}(V)$ będzie taki, że $\dim V = 10$, $\dim \ker \phi = 6$ oraz $\phi^2 = 0$. Pokaż, że dowolny endomorfizm $\psi \in \text{End}(V)$ spełniający $\psi^2 - \psi^4 = \phi$ jest triangularyzowalny i wyznacz możliwe postaci Jordana macierzy tego endomorfizmu.

Zadanie 5. Rozważmy macierz $A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ następującej postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Niech $\phi : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Pokaż, że

$$\ker(\phi^7 - \text{id}) = \ker(\phi - \text{id}).$$

(b) Królowa Śnieżka rozdzieliła 3 litry mleka pomiędzy siedem kubków należących do siedmiu krasnoludków. Następnie pierwszy z krasnoludków rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki (sobie nic nie zostawił). Następnie drugi krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki, a za nim robiły to kolejne krasnoludki. Gdy ostatni, siódmy krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka pomiędzy pozostałych okazało się, że w kubku każdego z krasnoludków jest dokładnie tyle samo mleka, co na początku - gdy otrzymał je od Królowy Śnieżki. W jaki sposób Królowa rozdzieliła mleko między krasnoludki?