GAL II*, Zestaw zadań domowych I

Data zwrotu: 16 marca 2021, 12:14 (Moodle: https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=814).

Zadanie 1. *Sprawdź czy macierze $A, B \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ są podobne nad $\mathbb{Z}_{11}$, gdzie*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli tak, to podaj macierz odwracalną $P \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$, że $B = P^{-1}AP$. Czy któraś z macierzy A, B jest diagonalizowalna nad $\mathbb{Z}_{11}$?

Zadanie 2. *Znajdź wszystkie podprzestrzenie ϕ-niezmiennicze przestrzeni $\mathbb{Q}^3$, gdzie*

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. *Niech $f \in End(K^n)$ będzie takim endomorfizmem, że każda podprzestrzeń K^n jest niezmiennicza względem f. Pokaż, że istnieje takie $c \in K$, że $f(v) = cv$, dla każdego $v \in K^n$.*

Zadanie 4. *Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą diagonalizowalną o nieujemnych wartościach własnych. Pokaż, że istnieje dokładnie jedna macierz diagonalizowalna $B \in M_n(\mathbb{R})$ o nieujemnych wartościach własnych taka, że $B^2 = A$. Macierz tą oznaczamy jako $\sqrt{A}$. Pokaż, że istnieje wielomian $p \in \mathbb{R}[\lambda]$ taki, że $\sqrt{A} = p(A)$.*

Zadanie 5. *Dla dowolnych $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ macierz rozmiaru n o wyrazach z K postaci*

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_2 & a_4 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą cykliczną rozmiaru n nad K. Zbiór takich macierzy oznaczamy jako $Cykl_n(K)$.

(a) *Znajdź taką macierz $P \in M_n(K)$, że dla dowolnych $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ mamy $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = w(P)$, dla pewnego wielomianu $w \in K[\lambda]$. Wywnioskuj stąd, że $Cykl_n(K)$ to podprzestrzeń liniowa w $M_n(K)$, że iloczyn macierzy z $Cykl_n(K)$ jest w $Cykl_n(K)$ oraz, że mnożenie macierzy w $Cykl_n(K)$ jest przemienne.*

(b) *Niech $K = \mathbb{C}$. Pokaż, że każda z macierzy w $Cykl_n(K)$ jest diagonalizowalna.*