GAL II*, ćwiczenia 9,

Przykłady kombinatorycznych zastosowań form dwuliniowych

Zadanie domowe 1. *Wykaż, że dla dowolnej refleksywnej formy dwuliniowej h zachodzi tożsamość:*

$$h(h(x,y)z - h(x,z)y, x) = 0,$$

Pokaż, że forma dwuliniowa jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna lub alternująca.

Zadanie domowe 2. *Niech K będze ciałem o charakterystyce różnej od 2 i niech $0 \neq a \in K$. Znaleźć macierz odwracalną $Q \in M_2(K)$, że:*

$$Q^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1. *Niech X będzie zbiorem skończonym i niech $P(X)$ będzie symetryczną przestrzenią dwuliniową nad ciałem $\mathbb{Z}_2$ z formą h określoną wzorem $h(X,Y) = |X \cap Y| \mod 2$.*

- *Sprawdź, że zbiory podzbiory jednoelementowe zbioru X tworzą bazę przestrzeni $P(X)$ oraz znajdź macierz tej formy w tej bazie.*
- *Niech $X_1, \dots, X_k$ będą podzbiorami zbioru X. Jeśli każdy zbiór X_i ma nieparzystą liczbę elementów oraz każdy ze zbiorów $X_i \cap X_j$, $i \neq j$, ma parzystą liczbę elementów, to $k \leqslant |X|$.*

Zadanie 2. *Miasteczko Nieparzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym. każdy klub ma nieparzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Pokaz, że $m \leqslant n$, używając Zadania 1, oraz używając metody z wykładu: licząc rząd macierzy $A^T A$, gdzie w kolumnach A stoją „listy przynależności” mieszkańców do klubów.*

Zadanie 3. *Pokaż, że jeśli przestrzeń dwuliniowa (V,h) jest nieosobliwa, $\dim V = n$, to dla każdej podprzestrzeni $U \subseteq V$ mamy*

$$\dim U + \dim U^{\perp} = n.$$

W szczególności wymiar całkowicie zdegenerowanej podprzestrzeni w V jest nie większy niż $\lfloor n/2 \rfloor$.

Zadanie 4. *Miasteczko Parzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym każdy klub ma parzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Żadne dwa kluby nie mają identycznej listy członków. Pokaż, że $m \leqslant 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

Zadanie 5. *Pokaż, że jeśli w Parzystowie jest mniej niż $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ klubów (przy n mieszkańcach), to znajdzie się miejsce na co najmniej jeden dodatkowy klub.*

Zadanie 6 (Nierówność Fishera)**.** *Niech $C_1, C_2, \dots, C_m$ będą takimi różnymi, niepustymi podzbiorami zbioru n-elementowego, że wszystkie przecięcia $C_i \cap C_j$, gdzie $i \neq j$, mają tyle samo elementów. Pokaż, że $n \geqslant m$.*

Zadanie 7. *Wykaż, że nie istnieją 4 punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej takie, że odległość pomiędzy dowolnymi dwoma jest liczbą nieparzystą. Wskazówka: niech jeden z punktów będzie $(0,0)$. Rozważany zestaw odległości to*

$$||a||, ||b||, ||c||, ||a-b||, ||b-c||, ||c-a||.$$

Rozważ macierz Grama układu wektorów a, b, c i oblicz jej rząd.