GAL II*, ćwiczenia 8,

Formy dwuliniowe i ich własności. Kongruentność macierzy

Zadanie 1. *Niech h będzie symetryczną formą dwuliniową na V. Wykaż poniższe fakty i wskaż ich intepretację geometryczną:*

- *jeśli $h(x,y)=0$, to $h(x+y,x+y)=h(x,x)+h(y,y)$,*
- $h(x+y,x+y)+h(x-y,x-y)=2(h(x,x)+h(y,y))$,
- *jeśli $h(x,x)=h(y,y)$ to $h(x+y,x-y)=0$,*

Zadanie 2. *Wykaż, że dla dowolnej refleksywnej formy dwuliniowej h zachodzi tożsamość:*

$$h(h(x,y)z-h(x,z)y,x)=0,$$

Pokaż, że forma dwuliniowa jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetryczna lub alternująca.

Zadanie 3. *Wykaż, że dla dowolnej formy dwuliniowej h zachodzi tożsamość Cauchy'egp:*

$$h(x,x)(h(x,x)h(y,y)-h(x,y)h(y,x))=h(h(x,x)y-h(x,y)x,h(x,x)y-h(x,y)x).$$

Wywnioskuj stąd, że jeśli h jest formą symetryczną nad ciałem $\mathbb{R}$ taką, że $h(x,x)>0$, dla każdego $x\neq 0$, to

$$h(x,y)^2 \leqslant h(x,x)\cdot h(y,y).$$

Zadanie 4. *Które z macierzy*

$$\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}35 & -25\\ -25 & 35\end{bmatrix}$$

są kongruentne nad $\mathbb{Q}$? To samo pytanie gdy ciało $\mathbb{Q}$ zastąpimy przez $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$?

Zadanie 5. *Niech $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Pokazać, że macierze A i B są kongruentne nad ciałami $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{R}$, ale nie są kongruentne nad ciałami $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Q}$.*

Zadanie 6. *Niech K bědze ciałem o charakterystyce różnej od 2 i niech $0\neq a\in K$. Znaleźć macierz odwracalną $Q\in M_2(K)$, że:*

$$Q^T\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot Q=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. *Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech $a,b\in K$ spełniają $ab(a+b)\neq 0$. Wykaż, że następne macierze nad K są kongruentne:*

$$\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a+b & 0\\ 0 & ab(a+b)\end{bmatrix}.$$