GAL II*, ćwiczenia 6,

Twierdzenie Jordana cz. 2. Wyznaczanie bazy Jordana

Zadanie domowe 1 (ŁK 2.10). *Wyznacz postać Jordana macierzy $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ spełniającej*

$$w_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2 \qquad \textit{oraz} \qquad (A-2I)^2 \neq (A-2I)^3 = (A-2I)^4.$$

Zadanie domowe 2 (ŁK 2.9). *Załóżmy, że endomorfizm $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^5)$ spełnia:*

$$f^2 \neq 0, \qquad f^6 = 0, \qquad \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 2.$$

Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) możliwe postacie Jordana macierzy $M_{\mathrm{st}}(f)$.

Zadanie domowe 3 (ŁK 2.5). *Niech $A = J_{10}(\lambda) \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{Z}_3)$. Wyznacz postać Jordana macierzy A^{15} w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_3$.*

Zadanie 1 (ŁK 2.11). *Znajdź bazę Jordana endomorfizmu $f \in End(\mathbb{C}^3)$ zadanego macierzą:*

$$M_{st}^{st}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2 (ŁK 2.13). *Niech K będzie ciałem. Endomorfizm $f \in \mathrm{End}(K^5)$ zadany jest przez macierz*

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę Jordana endomorfizmu f w zależności od charakterystyki ciała K.

Zadanie 3 (ŁK 2.15). *Niech $K = \mathbb{Z}_7$ oraz $V = K^4$. Wyznacz bazę Jordana B oraz macierz $M_B(f)$ endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ zadanego macierzą*

$$M_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. *Znajdź bazę Jordana endomorfizmu $g : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ danego macierzą*

$$M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathcal{B}$ złożona jest z wektorów:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja 1. *Niech* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie dowolną funkcją. Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *określamy macierz* $A_f(n) \in M_n(\mathbb{C})$ *o wyrazach* a_{ij} *postaci:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i = f(j), \text{ dla pewnych } i, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Innymi słowy $A_f(n)$ *jest macierzą incydencji grafu skierowanego* $\Gamma_f(n)$ *o wierzchołkach* $1, \ldots, n$ *oraz o krawędziach* $i \to j$ *występujących wtedy i tylko wtedy, gdy* $i = f(j)$.

Zadanie 5. *Pokaż, że każda wartość własna macierzy* $A_f(n)$ *jest albo zerem, albo pierwiastkiem z jedynki.*

Definicja 2. *Następująca funkcję* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *nazywamy funkcją Collatza:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{3n+1}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \\ \frac{n}{2}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Hipoteza Collatza (1937). *Rozstrzygnąć czy dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *w ciągu* $f^n(k)$ *znajduje się liczba* 1. Zagadnienie to było rozważane przez wielu słynnych matematyków, m.in. Ulama, Kakutaniego. Paul Erdős wypowiedział o nim słynne zdanie: „mathematics is not yet ready for such problems".

Zadanie 6. *Wyznacz macierze funkcji Collatza dla* $n = 4$ *i* $n = 5$. *Jakie są ich wielomiany charakterystyczne i postaci Jordana? Jak wyglądają bazy Jordana tych macierzy?*

Definicja 3. ***Łańcuchem*** *w grafie* $\Gamma_f(n)$ *nazywamy uporządkowaną listę różnych wierzchołków* $(c_1, \ldots, c_r)$ *taką, że* $f(c_j) = c_{j+1}$, *dla* $1 \leqslant j < r$, *ale* $f(c_r) \neq c_1$. ***Cyklem*** *w grafie* Γ_n *nazwiemy uporządkowanę ciąg wierzchołków* $(z_1, \ldots, z_r)$ *takich, że* $f(z_j) = z_{j+1}$, *dla* $1 \leqslant j < r$ *oraz* $f(z_r) = z_1$. *Liczbę* r *występującą w tych definicjach nazywamy odpowiednio długością łańcucha lub długością cyklu w* Γ_r.

Zadanie 7. *Jak wyglądają postaci i bazy Jordana macierzy incydencji łańcucha oraz cyklu?*

Definicja 4. *Podziałem grafu skierowanego* $\Gamma_f(n)$ *nazywamy dowolny podzbiór rozłącznych cykli i łańcuchów w tym grafie, których sumą jest* $\Gamma_f(n)$. *Podziałem właściwym* $\Gamma_f(n)$ *nazywamy taki podział* $P = \{Z_1, \ldots, Z_r, C_1, \ldots, C_s\}$, *gdzie* $Z_1, \ldots, Z_r$ *są cyklami, zaś* $C_1, \ldots, C_s$ *są łańcuchami spełniającymi następujące własności:*

- *Każdy cykl w* $\Gamma_f(n)$ *jest równy* Z_i, *dla pewnego* i.
- *Jeśli* $\Gamma_f^{(i)}(n)$ *jest pografem* $\Gamma_f(n)$ *uzyskanym przez usunięcie wierzchołków z cykli* $Z_1, \ldots, Z_r$ *oraz z łańcuchów* $C_1, \ldots, C_i$, *to łańcuch* C_{i+1} *je maksymalnej długości w* $\Gamma_f^{(i)}(n)$.

Zadanie 8. *Pokazać, że dla każdej funkcji* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *istnieje podział właściwy każdego grafu* $\Gamma_f(n)$.

Twierdzenie 1. *Podział właściwy grafu* $\Gamma_f(n)$ *zadaje rozkład Jordana macierzy* $A_f(n)$.

Dowód twierdzenia oraz przeformułowanie problemu Collatza na problem algebry liniowej można znaleźć w pracy studenckiej „*The Jordan Canonical Form for a Class of Zero–One Matrices*" autorstwa Cardona i Tuckfielda (dostępna online i będzie dodana jako lektura). W bibliografii do tej pracy jest kilka artykułów naukowych z tej tematyki.

Zadanie 9. *Czy istnieje macierz zerojedynkowa nad* $\mathbb{R}$, *która nie ma postaci Jordana? A nad* $\mathbb{Q}$?