GAL II*, ćwiczenia 5,

Twierdzenie Jordana cz. 1. Wyznaczanie postaci Jordana

Zadanie domowe 1. *Niech* $A \in M_2(\mathbb{C})$ *spełnia* $tr(A) \neq 0$. *Pokazać, że dla dowolnej macierzy* $B \in M_2(\mathbb{C})$ *mamy równoważność* $AB = BA \Leftrightarrow A^2B = BA^2$.

Zadanie domowe 2. *Wyznacz wszystkie liczby* $a \in \mathbb{Q}$, *że macierz*

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{bmatrix}$$

jest kwadratem pewnej macierzy o wyrazach wymiernych.

Zadanie 1. *Które z poniższych czterech macierzy są podobne nad* $\mathbb{C}$*?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2 (ŁK 2.2)**.** *Wyznacz postać Jordana macierzy*

$$\begin{bmatrix} 5 & t & 1 \\ 0 & 5 & t-1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & t & 1 & 0 \\ 0 & 5 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3 (ŁK 2.10)**.** *Wyznacz postać Jordana macierzy* $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ *spełniającej*

$$w_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2 \qquad \textit{oraz} \qquad (A-2I)^2 \neq (A-2I)^3 = (A-2I)^4.$$

Zadanie 4 (ŁK 2.4)**.** *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_7).$$

1. *Znajdź taką macierz* $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_7)$, *aby macierz* $P^{-1}AP$ *była w postaci Jordana.*

2. *Zbadaj czy macierze* A *oraz* A^3 *są podobne.*

Zadanie 5 (ŁK 2.5)**.** *Niech* $A = J_{10}(\lambda) \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{Z}_3)$. *Wyznacz postać Jordana macierzy* A^{15} *w zależności od parametru* $\lambda \in \mathbb{Z}_3$.

Zadanie 6 (ŁK 2.9)**.** *Załóżmy, że endomorfizm* $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^5)$ *spełnia:*

$$f^2 \neq 0, \qquad f^6 = 0, \qquad \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 2.$$

Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) możliwe postacie Jordana macierzy $M_{\mathrm{st}}(f)$.