GAL II*, ćwiczenia 4,

Podprzestrzenie niezmiennicze i twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Zadanie domowe 1. *Wykazać następujące własności podprzestrzeni cyklicznej V_α względem $\phi \in \mathrm{End}(V)$.*
(a) V_α jest ***najmniejszą względem inkluzji*** *podprzestrzenią ϕ-niezmienniczą zawierającą wektor α,*
(b) Jeśli $0 \neq \alpha$, to bazą V_α jest układ $\mathcal{B} = (\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha))$, gdzie $k = \dim V_\alpha$,
(c) Niech $k = \dim V_\alpha$ oraz niech $c_0, \ldots, c_{k-1} \in K$ spełniają $c_0\alpha + c_1\phi(\alpha) + \ldots + c_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha) = 0$. Wówczas $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$ oraz

$$M(\phi|_{V_\alpha})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Zadanie domowe 2. *Niech $C(f(\lambda))$ będzie macierzą towarzyszącą wielomianu $f \in K[\lambda]$ oraz niech $a \in K$ będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Opisz podprzestrzeń własną $V_{(a)}$ endomorfizmu przestrzeni K^n opisanego w bazie standardowej macierzą $C(f(\lambda))$.*

Zadanie 1 (ŁK 1.51). *Załóżmy, że $V = \mathbb{C}^2$. Opisz podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$ danego wzorem: $f(x, y) = (3x + 2y, y)$. Ile (maksymalnie) podprzestrzeni niezmienniczych może mieć nieskalarny (tzn. różny od $\lambda\,\mathrm{id}_V$, dla $\lambda \in \mathbb{C}$) endomorfizm $g \in \mathrm{End}(V)$?*

Zadanie 2 (ŁK 1.52). *Zdefiniujmy $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ wzorem $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$. Wyznacz wartości własne endomorfizmu f i odpowiadające im podprzestrzenie własne. Czy istnieją takie f-niezmiennicze podprzestrzenie $U, V \subseteq X$, że $\dim U = \dim V$ oraz $X = U \oplus V$?*

Zadanie 3. *Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem algebraicznie domkniętym. Załóżmy, że w V jest tylko skończenie wiele podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych. Czy V musi być skończenie wymiarowa? Gdy V jest skończenie wymiarowa, co możemy powiedzieć o działaniu ϕ na V? Jak wygląda wielomian charakterystyczny $w_\phi(\lambda)$? Jak wygląda wówczas struktura podprzestrzeni niezmienniczych?*

Zadanie 4. *Niech $A \in M_2(\mathbb{C})$ spełnia $tr(A) \neq 0$. Pokazać, że dla dowolnej macierzy $B \in M_2(\mathbb{C})$ mamy równoważność $AB = BA \Leftrightarrow A^2B = BA^2$.*

Zadanie 5. *Pokaż, że dla dowolnych macierzy $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ istnieje $a \in \mathbb{R}$, że $(AB - BA)^2 = aI$.*

Zadanie 6. *Niech $A, B \in M_2(K)$ spełniają $\det(A) = \det(B) = 1$. Pokaż, że*

$$tr(AB) - (trA)(trB) + tr(AB^{-1}) = 0.$$

Zadanie 7. *Wyznacz wszystkie liczby $a \in \mathbb{Q}$, że macierz*

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & -1 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & a & -a \end{bmatrix}$$

jest kwadratem pewnej macierzy o wyrazach wymiernych.