GAL II*, ćwiczenia 3,

Podprzestrzeń cykliczna i macierze towarzyszące[1]

Zadanie domowe 1 (ŁK 1.16)**.** *Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, ze macierze $A, B \in M_n(K)$ spełniają $AB - BA = \lambda A$, dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Dowiedź, że*

$$A^k B - BA^k = k\lambda A^k,$$

dla dowolnego $k \geqslant 1$ i następnie wywnioskuj stąd, że istnieje N takie, że $A^N = 0$. Czy teza pozostaje prawdziwa, jeśli pominiemy założenie o charakterystyce ciała?

Zadanie domowe 2. *Pokaż, że jeśli graf G jest dwudzielny, to jeśli λ jest wartością własną $A(G)$, to $-\lambda$ również jest wartością własną $A(G)$. Czy zachodzi fakt odwrotny?*

Zadanie domowe 3. *Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $A(G)$ grafu G, to $|\lambda| \leqslant \Delta(G)$, gdzie $\Delta(G)$ to maksymalny stopień wierzchołka w grafie G. Pokaż ponadto, że:*

- *równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy G jest regularny (zacznij od G spójnego),*
- *pokaż, że jeśli $\Delta(G)$ to wartość własna $A(G)$, to ma ona krotność algebraiczną 1.*

Zadanie 1. *Wykazać następujące własności podprzestrzeni cyklicznej V_α względem $\phi \in \mathrm{End}(V)$.*

- *V_α jest* ***najmniejszą względem inkluzji*** *podprzestrzenią ϕ-niezmienniczą zawierającą wektor α,*
- *Jeśli $0 \neq \alpha$, to bazą przestrzeni cyklicznej V_α jest układ $\mathcal{B} = (\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha))$, gdzie $k = \dim V_\alpha$,*
- *Niech $k = \dim V_\alpha$ oraz niech $c_0, \ldots, c_{k-1} \in K$ spełniają $c_0\alpha + c_1\phi(\alpha) + \ldots + c_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha) = 0$. Wówczas*

$$M(\phi|_{V_\alpha})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Co więcej: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$.

Zadanie 2. *Niech $C(f(\lambda))$ będzie macierzą towarzyszącą wielomianu $f \in K[\lambda]$ oraz niech $a \in K$ będzie pierwiastkiem tego wielomianu. Opisz podprzestrzeń własną $V_{(a)}$ endomorfizmu przestrzeni K^n opisanego w bazie standardowej macierzą $C(f(\lambda))$.*

Zadanie 3. *Znajdź macierz odwrotną do macierzy towarzyszącej $C(f(\lambda))$. Dla endomorfizmu odwracalnego ϕ wyznacz współczynniki $w_{\phi^{-1}}(\lambda)$ za pomocą współczynników $w_\phi(\lambda)$.*

Zadanie 4. *Niech α, β, γ będą pierwiastkami zespolonymi wielomianu $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 2$. Znajdź wielomian $q \in \mathbb{C}[\lambda]$ o pierwiastkach $\alpha^2 + \alpha, \beta^2 + \beta, \gamma^2 + \gamma$.*

Zadanie 5. *Czy istnieje macierz A rozmiaru 4×4 o współczynnikach całkowitych taka, że $A^{12} = I$, ale $A^{11} \neq 1$? Do problemów tego typu jeszcze wrócimy.*

[1] ŁK - zbiór zadań dr. Kubata, AW - zadania prof. Webera