GAL II*, ćwiczenia 22,

Hiperpowierzchnie stopnia 2

Zadanie 1. *Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X zadanych równaniami:*

$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 2 = 0\}$,

$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0\}$.

Zadanie 2. *W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dane są hiperpowierzchnie*

$$X_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (1-c)x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_3 = 0\}, \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

Dla jakich wartości parametru c hiperpowierzchnie X_c i Y są afinicznie izomorficzne, gdzie:

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 - x_3 = 0\}.$$

Zadanie 3. *Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2 + 2x_3^2 + 6 = 0\}$. Znaleźć zbiór środków symetrii hiperpowierzchni X. Określić typ afiniczny krzywej $M \cap X$, gdzie*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 1 = 0\}.$$

Zadanie 4. *Określić typ afiniczny krzywej będącej przecięciem hiperpowierzchni*

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2 = 0\}$$

z płaszczyzną $H = \{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1\}$.

Zadanie 5. *Powierzchnię nazywamy prostokreślną jeśli jest sumą mnogościową pewnej rodziny prostych (na przykład stożek jest sumą rodziny prostych przechodzących przez ustalony punkt). Pokazać, że następujące powierzchnie są prostokreślne przez wyznaczenie rodzin prostych, których są sumami:*

(a) hiperboloida jednopowłokowa $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,

(b) paraboloida hiperboliczna $x^2 - y^2 = 2z$.

Zadanie 6. *Niech*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4xy - txz + 2tyz - x - 2y + t + 1 = 0\}.$$

1. *Określ typ afiniczny hiperpowierzchni A w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.*
2. *Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A posiada środek symetrii należący do A?*
3. *Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia A jest prostokreślna.*

Zadanie 7. *Dla każdej z krzywych*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x + 2y + 3 = 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 + 24xy + 10x + 55y + 75 = 0\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 16y^2 + 24xy + 50x + 25y + 75 = 0\}$$

znajdź izomorfizm afiniczny przekształcający tę krzywą na parabolę

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = 0\}.$$