GAL II*, ćwiczenia 21,

Funkcje wielomianowe w przestrzeni afinicznej i rzutowej, wstęp

Zadanie domowe 1 (Carathéodory)**.** *Jeśli S jest podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^d$, to jeśli $x \in \operatorname{conv}(S)$, to istnieje zbiór co najwyżej $d+1$-elementowy podzbiór R zbioru S taki, że $x \in \operatorname{conv}(R)$.*

Zadanie domowe 2 (Lemat o rozdzielaniu)**.** $(*)$ *Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$. Niech A, B będą dwoma rozłącznymi niepustymi podzbiorami wypukłymi w $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ oraz liczba rzeczywista c taka, że:*

$$\langle v, x\rangle \geqslant c, \quad \langle v, y\rangle \leqslant c,$$

dla każdego $x \in A$ oraz dla każdego $y \in B$. Innymi słowy: istnieje funkcjonał f na $\mathbb{R}^n$ taki, że:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant c, & \text{dla każdego } x \in A, \\ f(x) \leqslant c, & \text{dla każdego } y \in B. \end{cases}.$$

Zadanie domowe 3. $(*)$ *Pokazać, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ mają nieujemne części rzeczywiste, wówczas również wszystkie pierwiastki wielomianu $f'(x)$ mają nieujemne wartości rzeczywiste. Wywnioskować stąd, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $f \in \mathbb{C}[x]$ zawarte są w pewnym zbiorze wypukłym D (na płaszczyźnie zespolonej), wówczas wszystkie pierwiastki $f'(x)$ również są w D.*

Zadanie 1. *Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^3 + 2x_1^2x_3 - 4x_2x_3^5 - 7 = 0\}$. Znaleźć równanie opisujące hiperpowierzchnię X w układzie bazowym: $(2,1,3); (1,1,0), (0,3,1), (0,1,0)$.*

Zadanie 2. *Rozpatrzmy izomorfizm afiniczny $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadany wzorem:*

$$h((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + 4, 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 1, x_1 + x_2 + x_3 + 2).$$

(a) Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2x_2x_3 - 2x_2 + 5 = 0\}$. Znaleźć taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym hiperpowierzchnia $h(X)$ jest opisana równaniem $x_1^2x_2x_3 - 2x_2 + 5 = 0$.

(b) Niech hiperpowierzchnia $Y \subset \mathbb{R}^3$ będzie zadana warunkiem: $h(Y) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2 + x_2x_3 - 3 = 0\}$. Znaleźć taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym Y jest opisana równaniem $x_!x_2 + x_2x_3 - 3 = 0$.

Zadanie 3. *Dla funkcji wielomianowej $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = -4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2 - 6x_3 + 1$, znaleźć układ bazowy, w którym funkcji tej odpowiada jeden z wielomianów postaci:*

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c, \quad a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n.$$

Zadanie 4. *Rozważmy podzbiór $\mathbb{RP}^2$ złożony z punktów o współrzędnych jednorodnych $(x_1 : x_2 : x_3)$ spełniających: $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$. Pokazać, że zbiór ten*

- *w mapie standardowej U_{x_1} opisanej równaniem $x_1 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_1}, u_2 = \frac{x_2}{x_1}$ ma równanie hiperboli $u_2^2 - u_0^2 = 1$,*
- *w mapie standardowej U_{x_2} opisanej równaniem $x_2 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_2}, u_2 = \frac{x_1}{x_2}$ ma równanie okręgu $u_0^2 + u_1^2 = 1$,*

- *w mapie niestandardowej* $U_{x_1+x_2}$ *opisanej równaniem* $x_1+x_2=1$, *we współrzędnych:* $t=\frac{x_0}{x_1+x_2}$, $u=\frac{x_2-x_1}{x_2+x_1}$ *ma równanie paraboli* $t^2=u$.

Zadanie 5. *Na mapie afinicznej* $U_{x_0}\simeq\mathbb{R}^2$ *opisanej w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *równaniem* $x_0=1$ *dane są krzywe dane w lokalnych współrzędnych afinicznych* x_1,x_2 *równaniami:*

$$x_2^2-x_1^2-1=0,\quad x_2^2-x_1^2=0,\quad x_2^2-x_1^3=0.$$

Znajdź współrzędne jednorodne punktów niewłaściwych tych krzywych.

Zadanie 6. *Rozważmy przekształcenie* $\nu:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3$ *dane wzorem:*

$$(x_0:x_1)\mapsto(x_0^3:x_0^2x_1:x_0x_1^2:x_1^3):=(z_0:z_1:z_2:z_3).$$

Pokaż, że $\nu(\mathbb{P}^1)$ *równe jest zbiorowi złożonemu z rozwiązań układu równań w* $\mathbb{P}^3$*:*

$$z_0z_2=z_1^2,\quad z_0z_3=z_1z_2,\quad z_1z_3=z_2^2.$$