GAL II*, ćwiczenia 20,

Zbiory wypukłe

Zadanie domowe 1 (TK). *W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech S będzie czworościanem o podstawie $S((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ i wierzchołku p leżącym w płaszczyźnie $x_1 = 5$ na okręgu o środku $(5,0,0)$ i promieniu 1. Dla jakiego p objętość sympleksu S jest największa?*

Zadanie domowe 2 (ŁK 5.100). *Niech*

$$u_1 = (1,2,-1), \qquad u_2 = (-1,2,0), \qquad u_3 = (-2,3,1).$$

Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające $u_1 \times v = u_2$ oraz $\langle u_3, v\rangle = 3$.

Zadanie domowe 3 (ŁK 5.101). *Niech $u = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$.*

1. *Opisz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające $u \times (u \times v) = v$.*
2. *Udowodnij, że gdy $v \in \mathbb{R}^3$, to $u = v \times (u \times v) \iff u \perp v$ oraz $\|v\| = 1$.*

Zadanie domowe 4 (ŁK 5.98). *Załóżmy, że $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$. Pokaż, że:*

1. $\langle v_1 \times v_2, v_3\rangle = \langle v_3 \times v_1, v_2\rangle$.
2. $\|v_1 \times v_2\|^2 + \langle v_1, v_2\rangle^2 = \|v_1\|^2\|v_2\|^2$.
3. $v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3\rangle v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_3$.
4. $v_1 \times (v_2 \times v_3) - (v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_2, v_3\rangle v_1 - \langle v_1, v_2\rangle v_3$.
5. $v_1 \times (v_2 \times v_3) + v_2 \times (v_3 \times v_1) + v_3 \times (v_1 \times v_2) = 0$.
6. $(v_1 \times v_2) \times (v_3 \times v_4) = \langle v_1 \times v_3, v_4\rangle v_2 - \langle v_2 \times v_3, v_4\rangle v_1$.

Definicja. Podzbior S przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^d$ nazwiemy **wypukłym** jeśli dla każdych $x, y \in S$ oraz $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ mamy

$$\theta x + (1-\theta)y \in S.$$

Zadanie 1. *Każda podprzestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$ jest wypukła. Wykaż, że następujące zbiory są wypukłe:*

- *część wspólna dowolnej rodziny zbiorów wypukłych,*
- ***półprzestrzeń** w $\mathbb{R}^n$, czyli zbiór postaci:*

  $$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant b\},$$

  dla pewnych $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$,
- ***kula** w $\mathbb{R}^n$, czyli zbiór postaci:*

  $$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \ \leqslant 1\},$$

  gdzie $\|x\|$ jest dowolną normą w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$,

- *zbiór macierzy dodatnio półokreslonych rozmiaru n (można je traktować jako podzbiór $\mathbb{R}^{n^2}$),*

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant x^2 + y^2\}$.

Definicja. Przez **otoczkę wypukłą podzbioru** A przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$, ozn. $\operatorname{conv}(A)$, rozumiemy zbiór wszystkich kombinacji afinicznych elementów zbioru A o nieujemnych wagach. Jest to w sposób oczywisty przecięcie wszystkich zbiorów wypukłych zawierających A.

Zadanie 2 (Radon)**.** *Niech $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^d$, gdzie $m \geqslant d + 2$. Pokazać, że istnieje podział zbioru $\{1, \ldots, m\}$ na podzbiory I, J takie, że $\operatorname{conv}(\{a_i, i \in I\}) \cap \operatorname{conv}(\{a_j, j \in J\})$ jest niepusty.*

Zadanie 3 (Helly)**.** *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie rodziną zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^d$, gdzie $n > d+1$. Pokaż, że jeśli przecięcie dowolnych $d + 1$ z tych zbiorów jest niepuste, wówczas przecięcie wszystkich tych zbiorów jest niepuste.*

Zadanie 4 (Carathéodory)**.** *Jeśli S jest podzbiorem przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^d$, to jeśli $x \in \operatorname{conv}(S)$, to istnieje zbiór co najwyżej $d + 1$-elementowy podzbiór R zbioru S taki, że $x \in \operatorname{conv}(R)$.*

Zadanie 5 (Lemat o rozdzielaniu)**.** $(*)$ *Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$. Niech A, B będą dwoma rozłącznymi niepustymi podzbiorami wypukłymi w $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ oraz liczba rzeczywista c taka, że:*

$$\langle v, x\rangle \geqslant c, \quad \langle v, y\rangle \leqslant c,$$

dla każdego $x \in A$ oraz dla każdego $y \in B$. Innymi słowy: istnieje funkcjonał f na $\mathbb{R}^n$ taki, że:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant c, & \text{dla każdego } x \in A, \\ f(x) \leqslant c, & \text{dla każdego } y \in B. \end{cases}.$$

Zadanie 6. $(*)$ *Pokazać, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ mają nieujemne części rzeczywiste, wówczas również wszystkie pierwiastki wielomianu $f'(x)$ mają nieujemne wartości rzeczywiste. Wywnioskować stąd, że jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $f \in \mathbb{C}[x]$ zawarte są w pewnym zbiorze wypukłym D (na płaszczyźnie zespolonej), wówczas wszystkie pierwiastki $f'(x)$ również są w D.*