GAL II*, ćwiczenia 2,

Diagonalizowalność, macierz sąsiedztwa grafu i jej wartości własne[1]

Zadanie domowe 1 (ŁK 1.22)**.** *Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_p).$$

Zadanie domowe 2 (AW, 3.1)**.** *Znaleźć wartości własne macierzy $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

Zadanie domowe 3 (ŁK 1.13)**.** *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{End}(V)$. Wykaż, że:*

1. *gdy $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, to dla dowolnego wielomianu $p \in K[\lambda]$ skalar $p(a)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$.*
2. *jeżeli skalar $p(a)$ jest, dla pewnego $a \in K$, wartością własną endomorfizmu $p(f)$ oraz*

$$p(\lambda) - p(a) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_i) \in K[\lambda],$$

to przynajmniej jeden ze skalarów $a_1, \dots, a_n \in K$ jest wartością własną endomorfizmu f.

Wskaż przykład takiego endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, wielomianu $p \in K[\lambda]$ oraz skalara $a \in K$, że skalar $p(a)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$, natomiast a nie jest wartością własną endomorfizmu f.

Zadanie 1 (AW 3.4)**.** *Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathrm{End}(V)$ ma $n = \dim V$ różnych wartości własnych i dla $h \in \mathrm{End}(V)$ zachodzi $f \circ h = h \circ f$, to h jest diagonalizowalny.*

Zadanie 2 (AW 3.8 mod)**.** *Niech $A \in M_{m \times n}(K)$ oraz $B \in M_{n \times m}(K)$. Korzystając z następujących macierzy blokowych:*

$$C = \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

udowodnij, że $\lambda^m \cdot w_{BA}(\lambda) = \lambda^n \cdot w_{AB}(\lambda)$.

Zadanie 3 (ŁK 1.16)**.** *Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki zero oraz $n \geqslant 1$. Przypuśćmy, ze macierze $A, B \in M_n(K)$ spełniają $AB - BA = \lambda A$, dla pewnego $0 \neq \lambda \in K$. Dowiedź, że*

$$A^k B - B A^k = k \lambda A^k,$$

dla dowolnego $k \geqslant 1$ i następnie wywnioskuj stąd, że istnieje N takie, że $A^N = 0$. Czy teza pozostaje prawdziwa, jeśli pominiemy założenie o charakterystyce ciała?

---

[1]ŁK - zbiór zadań dr. Kubata, AW - zadania prof. Webera

Definicja 1. *Dla (niezorientowanego) grafu prostego G o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$ definiujemy macierz sąsiedztwa $A(G) = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ warunkami:*

- $a_{ij} = 1$, *jeśli wierzchołki i oraz j są połączone w G,*
- $a_{ij} = 0$, *jeśli $i = j$ lub wierzchołki i, j nie są połączone w G.*

Zadanie 4. *Jeśli G_1, G_2 są parą izomorficznych[2] grafów skończonych o macierzach sąsiedztwa $A(G_1)$, $A(G_2)$, to istnieje macierz permutacyjna[3] P taka, że:*

$$A(G_2) = P^{-1}A(G_1)P.$$

W szczególności macierze $A(G_1), A(G_2)$ mają ten sam zbiór wartości własnych (z krotnościami).

Zadanie 5. *Suma wartości własnych macierzy sąsiedztwa grafu wynosi 0.*

Zadanie 6. *Wyznacz wielomian charakterystyczny macierzy sąsiedztwa grafu pełnego K_n.*

Zadanie 7. *Pokaż, że jeśli graf G jest dwudzielny, to jeśli λ jest wartością własną $A(G)$, to $-\lambda$ również jest wartością własną $A(G)$. Czy zachodzi fakt odwrotny?*

Zadanie 8. *Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy $A(G)$ grafu G, to $|\lambda| \leqslant \Delta(G)$, gdzie $\Delta(G)$ to maksymalny stopień wierzchołka w grafie G. Pokaż ponadto, że:*

- *równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy G jest regularny (zacznij od G spójnego),*
- *pokaż, że jeśli $\Delta(G)$ to wartość własna $A(G)$, to ma ona krotność algebraiczną 1.*

Zadanie 9. *Niech G ma wierzchołki $v_1, \ldots, v_n$. Dla każdego dodatniego k wyraz w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie macierzy $A(G)^k$ zlicza ścieżki długości k o początku w v_i oraz końcu w v_j. W szczególności:*

- $tr(A(G)^2)$ *równy jest dwukrotności liczby krawędzi grafu G,*
- $tr(A(G)^3)$ *równy jest sześciokrotności liczby różnych trójkątów w G,*

Zadanie 10 (Twierdzenie o przyjaźni (Erdos, Renyi, Sos))**.** *Załóżmy, że w gronie $n > 1$ osób każde dwie osoby mają dokładnie jednego wspólnego znajomego (A jest znajomym B wtedy i tylko wtedy, gdy B jest znajomym A). Wówczas istnieje w tym gronie osoba, która jest znajomym wszystkich pozostałych.*

Plan dowodu.

- Pokaż, że w opisanej sytuacji dwie osoby nieznajome mają taką samą liczbę znajomych.
- Pokaż, że gdyby teza nie zachodziła, to wszyscy musieliby mieć taką samą liczbę znajomych.
- Niech G będzie grafem k-regularnym o n wierzchołkach opisującym kontrprzykład do twierdzenia. Pokaż, ze $n = k^2 - k + 1$.
- Wyznacz wartości własne macierzy $G(A^2)$. Co to mówi o wartościach własnych $G(A)$ oraz o n i k?

---

[2] To znaczy: G_1, G_2 mają po n wierzchołków, dla pewnego n, i istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że (i, j) jest krawędzią G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $(\sigma(i), \sigma(j))$ jest krawędzią w G_2

[3] Powstała przez pewną permutację kolumn macierzy identycznościowej odpowiedniego rozmiaru.