GAL II*, ćwiczenia 18,

Odległość, objętość

Zadanie domowe 1 (ŁK 3.36)**.** *Niech*

$$p_1 = (2, -1, 3, -2), \qquad p_2 = (3, 1, 6, -1), \qquad p_3 = (5, 1, 4, 1),$$
$$q_1 = (1, -2, 3, 5), \qquad q_2 = (2, 1, 8, 7), \qquad q_3 = (3, 2, 10, -6)$$

oraz

$$L_1 = (2, 0, 4, -1) + \mathrm{lin}((0, 1, 2, 0)), \qquad L_2 = (1, -1, 5, -2) + \mathrm{lin}((0, 2, 3, -3)).$$

Czy istnieje odwzorowanie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ spełniające $f(p_i) = q_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$ oraz $f(L_1) = L_2$? Jeśli tak, to podaj przykład takiego odwzorowania.

Zadanie domowe 2 (ŁK 3.37)**.** *Niech $L_1 = (1, 1, 1) + \mathrm{lin}((1, 0, 1)), L_2 = (1, 0, 0) + \mathrm{lin}((1, 1, 1))$ będą prostymi w $\mathbb{C}^3$. Podaj przykład takiego odwzorowania afinicznego $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, że zachodzi $f(L_1) = L_2$ oraz $f(L_2) = L_1$.*

Zadanie domowe 3 (ŁK 3.42)**.** *Niech*

$$A = \mathrm{af}\{(1, 2, 1), (2, 1, 2), (0, 3, 1)\}, \qquad B = \mathrm{af}\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 0)\}$$

będą płaszczyznami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem A, zaś $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem B.

1. *Wyznacz bazy punktowe przestrzeni $f(B)$ oraz $g(A)$.*
2. *Wyznacz wzór $h = g \circ f$ w standardowym układzie bazowym. Uzasadnij, że h jest obrotem i wyznacz oś oraz kąt tego obrotu.*

Zadanie 1 (TK)**.** *Znaleźć odległość punktu $q = (1, 2, 1, 0)$ od przestrzeni $H : x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$ w $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle_{st})$ oraz w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym danym wzorem:*

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4.$$

Zadanie 2 (TK)**.** *W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech S będzie czworościanem o podstawie $S((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ i wierzchołku p leżącym w płaszczyźnie $x_1 = 5$ na okręgu o środku $(5, 0, 0)$ i promieniu 1. Dla jakiego p objętość sympleksu S jest największa?*

Zadanie 3 (TK)**.** *W $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć na paraboli $x_2^2 = x_1$ punkt leżący najbliżej prostej $af((-1, 0), (0, 2))$.*

Zadanie 4 (AS)**.** *Podaj przykład takich wektorów α, β, γ w $\mathbb{R}^3$, że $(\alpha \times \beta) \times \gamma \neq \alpha \times (\beta \times \gamma)$. Udowodnić, że dla dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ mamy $(\alpha \times \beta) \times \alpha = \alpha \times (\beta \times \alpha)$.*

Zadanie 5 (ŁK 5.100)**.** *Niech*

$$u_1 = (1, 2, -1), \qquad u_2 = (-1, 2, 0), \qquad u_3 = (-2, 3, 1).$$

Wyznacz wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające $u_1 \times v = u_2$ oraz $\langle u_3, v\rangle = 3$.

Zadanie 6 (ŁK 5.101)**.** *Niech* $u = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

1. *Opisz wszystkie wektory* $v \in \mathbb{R}^3$ *spełniające* $u \times (u \times v) = v$.

2. *Udowodnij, że gdy* $v \in \mathbb{R}^3$, *to* $u = v \times (u \times v) \iff u \perp v$ *oraz* $\|v\| = 1$.

Zadanie 7 (ŁK 5.98)**.** *Załóżmy, że* $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$. *Pokaż, że:*

1. $\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = \langle v_3 \times v_1, v_2 \rangle$.

2. $\|v_1 \times v_2\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2$.

3. $v_1 \times (v_2 \times v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$.

4. $v_1 \times (v_2 \times v_3) - (v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_2, v_3 \rangle v_1 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$.

5. $v_1 \times (v_2 \times v_3) + v_2 \times (v_3 \times v_1) + v_3 \times (v_1 \times v_2) = 0$.

6. $(v_1 \times v_2) \times (v_3 \times v_4) = \langle v_1 \times v_3, v_4 \rangle v_2 - \langle v_2 \times v_3, v_4 \rangle v_1$.

Zadanie 8 (AS)**.** *Niech* $l_1 = p + \mathrm{lin}(\alpha)$, $l_2 = q + \mathrm{lin}(\alpha)$ *będą równoległymi prostymi w przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^3$. *Udowodnij, że odległość* $\rho(l_1, l_2)$ *równa jest:*

$$\frac{\|\alpha \times \overrightarrow{pq}\|}{\|\alpha\|}.$$

Zadanie 9 (AS)**.** *Niech* $l_1 = p + \mathrm{lin}(\alpha), l_2 = q + \mathrm{lin}(\beta)$ *będą nierównoległymi prostymi w przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^3$. *Udowodnij, że odległość* $\rho(l_1, l_2)$ *równa jest:*

$$\frac{|\langle \alpha \times \beta, \overrightarrow{pq} \rangle|}{\|\alpha \times \beta\|}.$$

Zadanie 10 (ŁK 5.124)**.** *Niech* $n \geqslant 1$. *Załóżmy, że* $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ *oraz* $\alpha \in \mathbb{R}^n$. *Zdefiniujmy:*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = a.\}.$$

Wyznacz wzór na:

(1) *odległość* $\rho(x, A)$ *punktu* $x \in \mathbb{R}^n$ *od hiperpowierzchni* A,

(2) *rzut prostopadły na hiperpowierzchnię* A,

(3) *symetrię prostopadłą względem hiperpowierzchni* A.