# GAL II*, ćwiczenia 18,

## Przestrzenie afiniczne cd. Przekształcenia afiniczne.

**Zadanie domowe 1** (ŁK 3.7)**.** *Niech $A, B$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $X$. Wykaż, że:*

1. *gdy $p \in A$ oraz $q \in B$, to $A \cap B \neq \emptyset \iff \overrightarrow{pq} \in T(A) + T(B)$.*
2. *gdy $A \cap B \neq \emptyset$, to $\dim \operatorname{af}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim A \cap B$.*
3. *gdy $A \cap B = \emptyset$, to $\dim \operatorname{af}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim(T(A) \cap T(B)) + 1$.*

**Zadanie domowe 2** (TK)**.** *W $\mathbb{R}^3$ znajdź prostą $l$ przechodzącą przez punkt $(2, 1, 4)$ i przecinającą proste*

$$l_1 : (0, 1, 1) + t(1, -1, 1) \quad \text{oraz} \quad l_2 : (2, 0, 1) + t(1, 3, 0).$$

**Zadanie domowe 3** (ŁK 3.25)**.** *Niech $A$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $K$. Załóżmy, że $\dim A = n \geqslant 1$ oraz, że $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą punktową przestrzeni $A$. Przypuśćmy, że macierz $\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ spełnia $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} = 1$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Wykaż, że punkty*

$$q_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} p_j \in A \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

*są w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \Lambda \neq 0$.*

**Zadanie 1** (ŁK 3.26)**.** *Niech $A$ będzie przestrzenią afiniczną nad ciałem $K$. Przypuśćmy, że punkty $p_1, p_2, p_3 \in A$ są afinicznie niezależne oraz*

$$q_1 = \lambda_1 p_2 + (1 - \lambda_1) p_3 \in A, \quad q_2 = \lambda_2 p_3 + (1 - \lambda_2) p_1 \in A, \quad q_3 = \lambda_3 p_1 + (1 - \lambda_3) p_2 \in A.$$

*dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$. Dowiedź, że punkty $q_1, q_2, q_3$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1).$$

**Zadanie 2** (ŁK 3.27)**.** *Załóżmy, że $A$ jest przestrzenią afiniczną nad ciałem $K$ oraz $p_1, p_2, p_3 \in A$. Niech $L_1 = \operatorname{af}\{p_2, p_3\}, L_2 = \operatorname{af}\{p_3, p_1\}, L_3 = \operatorname{af}\{p_1, p_2\}$ oraz*

$$q_1 = \lambda_1 p_2 + (1 - \lambda_1) p_3 \in L_1, \quad q_2 = \lambda_2 p_3 + (1 - \lambda_2) p_1 \in L_2, \quad q_3 = \lambda_3 p_1 + (1 - \lambda_3) p_2 \in L_3$$

*dla pewnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$. Przypuśćmy, że wśród prostych $L_1, L_2, L_3$ żadne dwie nie są równoległe. Jakie warunki muszą spełniać skalary $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, by proste $L_1' = \operatorname{af}\{p_1, q_1\}, L_2' = \operatorname{af}\{p_2, q_2\}, L_3' = \operatorname{af}\{p_3, q_3\}$ przecinały się w jednym punkcie?*

**Zadanie 3** (ŁK, 3.29)**.** *Załóżmy, że $A$ jest przestrzenią afiniczną nad ciałem charakterystyki zero. Niech $n \geqslant 1$. Przez $i$-*tą medianę *punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in A$ rozumiemy prostą $L_i = \operatorname{af}\{p_i, q_i\} \subseteq A$, gdzie*

$$q_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{n} p_j \in A$$

*dla $0 \leqslant i \leqslant n$ jest* środkiem ciężkości *układu punktów $\{p_j : j \neq i\}$. Dowiedź, że $\bigcap_{i=0}^{n} L_i = \{p\}$ dla pewnego $p \in A$ i wyznacz ten punkt.*

**Zadanie 4** (ŁK 3.36)**.** *Niech*

$$p_1 = (2, -1, 3, -2), \qquad p_2 = (3, 1, 6, -1), \qquad p_3 = (5, 1, 4, 1),$$
$$q_1 = (1, -2, 3, 5), \qquad q_2 = (2, 1, 8, 7), \qquad q_3 = (3, 2, 10, -6)$$

*oraz*

$$L_1 = (2, 0, 4, -1) + \mathrm{lin}((0, 1, 2, 0)), \qquad L_2 = (1, -1, 5, -2) + \mathrm{lin}((0, 2, 3, -3)).$$

*Czy istnieje odwzorowanie afiniczne* $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *spełniające* $f(p_i) = q_i$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant 3$ *oraz* $f(L_1) = L_2$*? Jeśli tak, to podaj przykład takiego odwzorowania.*

**Zadanie 5** (ŁK 3.37)**.** *Niech* $L_1 = (1, 1, 1) + \mathrm{lin}((1, 0, 1)), L_2 = (1, 0, 0) + \mathrm{lin}((1, 1, 1))$ *będą prostymi w* $\mathbb{C}^3$*. Podaj przykład takiego odwzorowania afinicznego* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$*, że zachodzi* $f(L_1) = L_2$ *oraz* $f(L_2) = L_1$*.*

**Zadanie 6** (ŁK 3.42)**.** *Niech*

$$A = \mathrm{af}\{(1, 2, 1), (2, 1, 2), (0, 3, 1)\}, \qquad B = \mathrm{af}\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 0)\}$$

*będą płaszczyznami w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*. Załóżmy, że* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *jest symetrią względem* $A$*, zaś* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *jest symetrią względem* $B$*.*

1. *Wyznacz bazy punktowe przestrzeni* $f(B)$ *oraz* $g(A)$*.*
2. *Wyznacz wzór* $h = g \circ f$ *w standardowym układzie bazowym. Uzasadnij, że* $h$ *jest obrotem i wyznacz oś oraz kąt tego obrotu.*