# GAL II*, ćwiczenia 17,

## Przestrzenie afiniczne - wprowadzenie

**Zadanie 1** (TK). *Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ punkt $(5, t, 4, 3) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją afiniczną punktów $(1, 0, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 0)$?*

**Zadanie 2** (TK). *Niech $p_0 = (1, 1, 0), p_1 = (0, 1, 2), q_0 = (3, 1, 3), q_1 = (1, 0, 1)$. Czy istnieje punkt $p \in \mathbb{R}^3$, który jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, p_1$, i jest też kombinacją afiniczną punktów $q_0, q_1$?*

**Zadanie 3** (ŁK 3.13). *Wyznacz układy równań oraz parametryzacje podprzestrzeni afinicznych:*

- $\mathrm{af}((-1, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-3, -1, 5, 4), (2, 2, -3, -3))$,
- $(2, 1, 3, 3) + \mathrm{lin}((4, 1, 1, 2), (3, 4, 3, 1), (2, 7, 5, 0))$.

**Zadanie 4** (TK). *Znajdź bazę punktową oraz parametryzację płaszczyzny w $\mathbb{R}^4$ przechodzącej przez punkt $(3, 1, 2, 1)$ i równoległej do:*

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}.$$

**Zadanie 5** (ŁK 3.6). *Załóżmy, że $A, B$ są podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $X$. Niech $p \in A$ oraz $q \in B$. Udowodnij, że:* $\mathrm{af}(A \cup B) = \mathrm{af}(p, q) + T(A) + T(B)$.

**Zadanie 6** (ŁK 3.7). *Niech $A, B$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $X$. Wykaż, że:*

1. *gdy $p \in A$ oraz $q \in B$, to $A \cap B \neq \emptyset \iff \overrightarrow{pq} \in T(A) + T(B)$.*
2. *gdy $A \cap B \neq \emptyset$, to $\dim \mathrm{af}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim A \cap B$.*
3. *gdy $A \cap B = \emptyset$, to $\dim \mathrm{af}(A \cup B) = \dim A + \dim B - \dim(T(A) \cap T(B)) + 1$.*

**Zadanie 7** (TK). *W $\mathbb{R}^3$ znajdź prostą $l$ przechodzącą przez punkt $(2, 1, 4)$ i przecinającą proste*

$$l_1 : (0, 1, 1) + t(1, -1, 1) \quad \text{oraz} \quad l_2 : (2, 0, 1) + t(1, 3, 0).$$

**Zadanie 8.** *W $\mathbb{R}^3$ dane są: płaszczyzna $H : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, prosta $L = (-2, 4, -3) + \mathrm{lin}(0, 1, -2)$ oraz punkt $p = (1, 1, 0)$. Niech $M$ będzie taką prostą, która przechodzi przez punkt $p$, przecina prostą $L$ i nie przecina płaszczyzny $H$. Znajdź punkt $L \cap M$.*

**Zadanie 9.** *Niech $K$ będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 oraz niech $p, q, r, s$ będą niewspółliniowymi elementami przestrzeni afinicznej $H$ nad $K$. Pokaż, że następujące trzy warunki są równoważne:*
*(1)* $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$,
*(2)* $\mathrm{af}(p, r) \cap \mathrm{af}(q, s) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$,
*(3) istnieją punkty $a, b, c, d \in H$ takie, że $p, s, r, q$ są odpowiednio środkami odcinków $ab, bc, cd, da$.*

**Zadanie 10** (ŁK 3.25). *Niech $A$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem $K$. Załóżmy, że $\dim A = n \geqslant 1$ oraz, że $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą punktową przestrzeni $A$. Przypuśćmy, że macierz $\Lambda = [\lambda_{ij}] \in \mathrm{M}_{n+1}(K)$ spełnia $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} = 1$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$. Wykaż, że punkty*

$$q_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} p_j \in A \quad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

*są w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \Lambda \neq 0$.*