

**GAL II\*, ćwiczenia 16,**  
**Norma p-adyczna i ciało  $\mathbb{Q}_p$**

**Zadanie 1.** Oblicz  $|a - b|_p$  dla zadanych  $a, b, p$ :

(a)  $a = 1, b = 26, p = 5,$

(b)  $a = 1, b = 1/243, p = 3,$

(c)  $a = 2^{2^n} / (2^n)!, b = 0, p = 2.$

**Zadanie 2.** Wyznacz rozwinięcie 5-adyczne liczby 58.

**Zadanie 3.** Policz wartość sumy:

$$1 + p + p^2 + p^3 + \dots$$

w ciele  $\mathbb{Q}_p$ .

**Zadanie 4.** Udowodnij, że jeśli  $x \in \mathbb{Q}$  oraz  $|x|_p \leq 1$ , dla każdej liczby pierwszej  $p$ , to  $x \in \mathbb{Z}$ .

**Zadanie 5.** Niech  $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ . Załóżmy, że dla  $p = \infty$  przez  $|x|_p$  rozumiemy zwykłą wartość bezwzględną  $|x|$ . Udowodnić, że iloczyn  $\prod_p |x|_p$  (gdzie  $p$  to wszystkie liczby pierwsze oraz nieskończoność) równy jest 1 (zauważmy, że iloczyn ten ma jedynie skończenie wiele czynników różnych od 1).

**Zadanie 6.** Czy równanie  $x^2 = 2$  ma rozwiązanie w ciele  $\mathbb{Q}_5$ ?

**Zadanie 7.** Czy równanie  $x^2 + 1 = 0$  ma rozwiązanie w ciele  $\mathbb{Q}_5$ ? A w ciele  $\mathbb{Q}_7$ ?

**Zadanie 8.** Czy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  jest zbieżny w  $\mathbb{Q}_p$ ?

**Zadanie 9.** Wyznacz sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot n$  w ciele  $\mathbb{Q}_p$ .

**Zadanie 10.** Dla  $x \in \mathbb{Q}$  znajdź, w zal. od  $p$ , warunki konieczne i dostateczne na to, aby  $\lim_{i \rightarrow \infty} |x^i / i!|_p = 0$ .

**Zadanie 11.** Wyznacz granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{3^n}$  w  $\mathbb{Q}_3$ .