GAL II*, ćwiczenia 15,

Wstęp do form kwadratowych

Zadanie domowe 1. *Dla zadanej formy kwadratowej q podaj jej postać diagonalną i wyznacz bazę, w której forma q ma postać diagonalną. Zbadaj określoność q:*

- $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2.$
- $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$

Zadanie domowe 2. *Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ forma $q_1((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$ jest równoważna z formą $q_2((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + x_2^2 + sx_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$ nad $\mathbb{R}$? Zbadaj określoność formy q_2 w zależności od s.*

Zadanie domowe 3. *Oblicz rząd i sygnaturę formy kwadratowej $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danej warunkiem:*

$$G(q; st) = \begin{bmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{bmatrix},$$

w zależności od parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1 (ŁK 4.49)**.** *Załóżmy, ze $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że A jest symetryczną macierzą o wyrazach rzeczywistych i wartościach własnych $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Wyznacz wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, dla których wszystkie formy kwadratowe q_k na V zadane dla $k \in \mathbb{N}$ warunkiem $G(q_k; st) = (A + \lambda I)^k$, są dodatnio określone.*

Zadanie 2 (ŁK 4.40)**.** *Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = M_n(\mathbb{R})$. Wykaż, że odwzorowanie $q : V \to \mathbb{R}$, dane wzorem $q(A) = tr(A^2)$ jest formą kwadratową. Znajdź rząd i sygnaturę formy q.*

Zadanie 3 (ŁK 4.41)**.** *Załóżmy, że X jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Niech $r, s \geqslant 1$ oraz $f_1, \ldots, f_{r+s} \in X^*$. Sprawdź, że odwzorowanie $q : X \to \mathbb{R}$ dane wzorem:*

$$q(x) = f_1(x)^2 + \ldots + f_r(x)^2 - f_{r+1}(x)^2 - \ldots - f_{r+s}(x)^2,$$

jest formą kwadratową. Uzasadnij, że gdy rząd formy q jest równy $p+q$, zaś sygnatura formy q jest równa $p - q$ dla pewnych $p, q \geqslant 0$, to $p \leqslant r$ oraz $q \leqslant s$.

Zadanie 4. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ oraz niech $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Udowodnij, że podzbiór $L = \{v \in V \mid q(v) \geqslant 0\}$ tworzy podprzestrzeń liniową w V wtedy i tylko wtedy, gdy q jest formą określoną (czyli nie jest formą nieokreśloną).*

Zadanie 5 (ŁK 4.54)**.** *Niech $n \geqslant 1$ oraz $V = \mathbb{Q}^n$. Rozważmy formę q na V daną wzorem:*

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Twierdzenie Lagrange'a o sumie czterech kwadratów mówi, że każda liczba naturalna da się przedstawić jako suma co najwyżej cterech kwadratów liczb naturalnych. Wywnioskuj stąd, że gdy $n \geqslant 4$, to zbiorem niezerowych wartości q, ozn.$D(q)$ jest $\mathbb{Q}_+$, natomiast gdy $n \leqslant 3$, to $D(q) \neq \mathbb{Q}_+$ (równoważnie, $\mathbb{N} \not\subseteq D(q)$).