GAL II*, ćwiczenia 14,

Twierdzenie spektralne w teorii grafów

Zadanie 1. *Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest niezorientowanym grafem spójnym. Niech $v(G) = n$ oraz $\lambda_{\max}(G)$ (odp. $\lambda_{\min}(G)$) oznacza największą (odp. najmniejszą) wartość własną macierzy sąsiedztwa M_G grafu G. Uzasadnij, że:*

1. *krotność geometryczna wartości własnej $\lambda_{\max}(G)$ jest równa 1.*
2. *jeżeli $0 \neq v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym macierzy sąsiedztwa M_G odpowiadającym wartości własnej $\lambda_{\max}(G)$, to $v_1, \ldots, v_n > 0$ lub $v_1, \ldots, v_n < 0$.*
3. *jeżeli $0 \neq v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym macierzy sąsiedztwa M_G odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \sigma(M_G)$ oraz $v_1, \ldots, v_n \geqslant 0$, to $\lambda = \lambda_{\max}(G)$.*
4. *gdy dla pewnego $k \geqslant 0$ graf G jest k-regularny, to $\lambda_{\max}(G) = k$.*

Zadanie 2. *Załóżmy, że G jest spójnym grafem niezorientowanym. Wykaż, że średnica G jest mniejsza niż liczba różnych wartości własnych M_G.*

Zadanie 3. *Niech G' będzie podgrafem indukowanym[1] niezorientowanego grafu G. Wykaż, że*

$$\lambda_{\min}(G) \leqslant \lambda_{\min}(G') \leqslant \lambda_{\max}(G') \leqslant \lambda_{\max}(G).$$

Zadanie 4. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym najwyższy stopień wierzchołka wynosi k. Niech $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną grafu G. Wówczas*

(a) $\chi(G) \leqslant k + 1$. *(b)* $\frac{2|E|}{|V|} \leqslant \lambda_{\max}(G) \leqslant k$. *(c)* $\chi(G) \leqslant 1 + \lambda_{\max}(G)$.

Zadanie 5. *Niech $G = (V, E)$ będzie prostym grafem niezorientowanym. Przez $B(G) \in M_{|E|\times|V|}(\mathbb{R})$ oznaczamy macierz $0-1$-kową, której wiersze indeksowane są krawędziami G, zaś kolumny ideksowane są wierzchołkami G, która na pozycji (i, j) ma 1 wtedy i tylko wtedy, gdy krawędź indeksująca i-ty wiersz $B(G)$ jest incydentna z wierzchołkiem indeksującym j-tą kolumnę $B(G)$. Pokaż, że $B(G)^T B(G) = \Delta + M_G$, gdzie Δ to macierz diagonalna, której wyrazami są stopnie wierzchołków w G. Wywnioskuj stąd, że jeśli G_k jest grafem regularnym stopnia k, to $\lambda_{min}(M_{G_k}) \geqslant -k$.*

Zadanie 6. *Niech $G = (V, E)$ będzie prostym grafem niezorientowanym. Grafem krawędziowym $L(G)$ grafu G nazywamy graf[2], który ma $|E|$ wierzchołków i $|V|$ krawędzi, przy czym wierzchołkami (i, j), (k, l) grafu $L(G)$ połączone są krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in \{k, l\}$ lub $j \in \{k, l\}$. Pokaż, że*

$$\lambda_{min}(L(G)) \geqslant -2.$$

[1] Czyli $V(G') \subseteq V(G)$ i zbiór krawędzi łączących wierzchołki G' jest taki sam, jak w G.

[2] Interesującym problemem jest pytanie czy każdy graf może być grafem krawędziowym. Okazuje się, że nie. W 1968 roku L. Beineke pokazał, że graf jest grafem krawędziowym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego z 9 grafów postaci: