GAL II*, ćwiczenia 13,

Macierze nieujemnie określone

Zadanie domowe 1 (Rozkład Cholesky'ego)**.** *Niech* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje macierz dolnotrójkątna* L *taka, że* $A = L \cdot L^T$*,*
- A *jest symetryczna i dla każdego* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *mamy* $\alpha^T A\alpha \geqslant 0$*.*

Zadanie domowe 2. *Pokaż, że nie istnieją macierze ortogonalne* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *spełniające równanie*

$$A^2 - B^2 = AB.$$

Czy jest to prawda dla dowolnych macierzy odwracalnych A, B*?*

Zadanie domowe 3. *Pokaż, że jeśli macierze ortogonalne* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *spełniają rowność* $\det(A) + \det(B) = 0$*, to* $\det(A + B) = 0$*.*

Zadanie 1. *Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną* P*, aby macierz*

$$P^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} P$$

była diagonalna.

Definicja 1. *Niech* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *będzie macierzą symetryczną. Macierz* A *nazywamy* ***nieujemnie określoną****, jeśli* $v^T Av \geqslant 0$*, dla dowolnego* $v \in \mathbb{R}^n$*,*

Zadanie 2. *Niech* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *będzie symetryczną macierzą nieujemnie określoną. Pokaż, że:*

$$\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A).$$

Zadanie 3. *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n(R)$ *będzie symetryczną macierzą nieujemnie okreśoną o wartościach własnych* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Pokaż, że jeśli* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją wypukłą, to:*

$$f(a_{11}) + f(a_{22}) + \ldots + f(a_{nn}) \leqslant f(\lambda_1) + f(\lambda_2) + \ldots + f(\lambda_n).$$

Wywnioskuj stąd, że:

$$\det A \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

oraz nierówność Hadamarda, dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$*:*

$$|\det A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right).$$

Wskazówka: rozważ: $B = A^T A$*.*

Zadanie 4. *Dana jest sześcienna kostka o zbiorze ścian* $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$*. Niech* $V = F(X, \mathbb{R})$*. Na przestrzeni* V *określamy iloczyn skalarny wzorem*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{6} f(x_i) g(x_i).$$

Niech $x^* \in X$ *będzie ścianą leżącą naprzeciw ściany* $x \in X$ *oraz niech* $N(x)$ *to zbiór ścian sąsiadujących ze ścianą* x*. Rozważmy podprzestrzenie* V *postaci:*

- $V_1 = \{f \in V \mid f \text{ jest stała}\}$,
- $V_2 = \{f \in V \mid \sum_{x \in X} f(x) = 0 \text{ oraz } f(x^*) = f(x) \text{ dla } x \in X\}$,
- $V_3 = \{f \in V \mid f(x^*) = -f(x) \text{ dla } x \in X\}$.

Pokaż, że V_1, V_2, V_3 *są wzajemnie ortogonalne, tzn.* $V_i \subset V_j^{\perp}$*, dla* $i \neq j$*. Pokaż, że podprzestrzenie* V_1, V_2, V_3 *są* L*-niezmiennicze, gdzie* $L : V \to V$ *dane jest wzorem:*

$$(Lf)(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} f(y).$$

Pokaż, że L *jest samosprzężony i wyznacz jego ortonormalną bazę wektorów własnych.*

Pokaż, że $\lim_{n \to \infty} (L^n f)(x)$ *nie zależy od wyboru* $x \in X$*, gdzie* $L^n f = (\underbrace{L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n})(f)$*.*