GAL II*, ćwiczenia 12,

Izometrie i macierze ortogonalne

Zadanie 1. *W przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *ze standardowym iloczynem skalarnym wyznaczyć wzór na obrót wokół* $L = \mathrm{lin}(1, 0, -1)$ *o kąt* $\pi/6$ *zgodnie z orientacją przestrzeni* $L^{\perp}$ *wyznaczoną przez bazę* $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ *tej przestrzeni.*

Zadanie 2. *Wykaż, że każda izometria* 3*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej jest*

- *albo obrotem o macierzy (w pewnej bazie)* $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- *albo obrotem z odbiciem o macierzy (w pewnej bazie)* $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
- *albo symetrią płaszczyznową o macierzy (w pewnej bazie)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. *Niech* f *będzie endomorfizmem liniowym przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *ze standardowym iloczynem skalarnym, którego macierzą w bazie standardowej jest macierz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przedstawić f *jako złożenie przekształceń, z których każde jest pewnym obrotem lub pewną symetrią prostopadłą, opisując je(osie i kąty obrotów/płaszczyzny względem których działają symetrie).*

Zadanie 4. *Macierz* A *pewnej izometrii przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^3$ *ze standardowym iloczynem skalarnym ma ślad równy* -2*. Wykaż, że izometria ta jest złożeniem obrotu i pewnej symetrii prostopadłej.*

Zadanie 5. *Wykorzystując twierdzenie o ortogonalizacji Grama-Schmidta pokaż, że każdą macierz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *można przedstawić jako iloczyn* QR*, gdzie* Q *jest macierzą ortogonalną oraz* R *jest górnotrójkątna. Pokaż, że jeśli* A *jest odwracalna, to rozkład ten jest jednoznaczny. Wyznacz rozkład* QR *macierzy*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 (Rozkład Cholesky'ego)**.** *Niech* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:*

- *istnieje macierz dolnotrójkątna* L *taka, że* $A = L \cdot L^T$,
- A *jest symetryczna i dla każdego* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *mamy* $\alpha^T A\alpha \geqslant 0$.

Zadanie 7 (Klasyfikacja izometrii w $\mathbb{R}^n$). *Niech* $(V, \langle\, , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową i niech* $\phi \in \mathrm{End}(V)$ *będzie izometrią. Wówczas*

- *jeśli* $W \subseteq V$ *jest* ϕ*-niezmiennicza, to* $W^{\perp}$ *też jest* ϕ*-niezmiennicza,*
- ϕ *ma podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru* $\leqslant 2$*,*
- *istnieje baza ortonormalna* $\mathcal{A}$ *przestrzeni* $(V, \langle\, , \rangle)$*, w której macierz* ϕ *ma postać:*

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s}, O_{\theta_1}, \ldots, O_{\theta_t}),$$

gdzie $k + s + 2t = n$*,* $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant n$*,* $0 \leqslant t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ *oraz*

$$O_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8. *Pokaż, że nie istnieją macierze ortogonalne* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *spełniające równanie*

$$A^2 - B^2 = AB.$$

Czy jest to prawda dla dowolnych macierzy odwracalnych A, B*?*

Zadanie 9. *Pokaż, że jeśli macierze ortogonalne* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *spełniają rowność* $\det(A) + \det(B) = 0$*, to* $\det(A + B) = 0$.