GAL II*, ćwiczenia 11,

Formy dwuliniowe, iloczyny skalarne, twierdzenie o inercji

Zadanie 1. *Na przestrzeni* $V = M_n(\mathbb{R})$ *definiujemy funkcjonał dwuliniowy* $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *dany wzorem:*

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A).$$

(a) *Udowodnij, że* $\langle\, , \rangle$ *jest iloczynem skalarnym i wskaż (dowolną) bazę ortonormalną tej przestrzeni.*

(b) *Niech* $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_{st})$ *będzie przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym. Wykaż, że dla dowolnej* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *oraz dowolnego* $v \in \mathbb{R}^n$ *zachodzi nierówność*

$$\|Av\| \leqslant \|A\| \cdot \|v\|.$$

Wywnioskuj stąd, że dla każdej rzeczywistej wartości własnej λ *macierzy* A *zachodzi nierównosć*

$$|\lambda| \leqslant \|A\|.$$

Zadanie 2. *W przestrzeni dwuliniowej* (Re^4, ϕ), *gdzie* ϕ *w bazie standardowej jest zadana przez macierz:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *znaleźć* $W^\perp$, *gdzie* W *jest podprzestrzenią zadaną przez układ równań:*

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

znaleźć bazę prostopadłą tej przestrzeni.

(b) *Czy* $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$? *Czy forma* $\phi_{|W\times W}$ *jest nieosobliwa?*

Zadanie 3. *Dane są macierze:*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad $\mathbb{Q}$?

Zadanie 4. *Dla* $n \in \mathbb{Z}$ *zdefiniujmy macierz*

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & n \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}).$$

Dla jakich par $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *macierze* A_n *oraz* A_m *są kongruentne nad* $\mathbb{Q}$? *To samo pytanie gdy ciało* $\mathbb{Q}$ *zastąpimy przez* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$.

Zadanie 5. *Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna* 4×4, *której znaki minorów są nastepujące?*

(a) – , + , 0 , –

(b) – , + , 0 , +

Jeśli tak, to czy znamy sygnaturę tej macierzy?