GAL II*, ćwiczenia 10,

Przestrzenie euklidesowe, dwuliniowe i bazy prostopadłe

Zadanie 1 (ŁK 5.2). *Przypuśćmy, że* $\alpha \neq 0$ *oraz* β *są wektorami przestrzeni* $(V, \langle , \rangle)$*, gdzie* $\langle , \rangle$ *jest iloczynem skalarnym. Dowiedź, że następujące warunki są równoważne:*

(1) $\alpha = \lambda\beta$*, dla pewnego* $\lambda \geqslant 0$*,*

(2) $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$*,*

(3) $\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$.

Definicja 1. *Niech* $\langle \, , \, \rangle$ *będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni* V*. Niech* α, β *będą niezerowymi wektorami przestrzeni* V*. Liczbę* $\theta \in [0, \pi]$ *taką, że*

$$\frac{\langle \, \alpha, \beta \, \rangle}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|} = \cos\theta$$

nazywamy (niezorientowanym) **`kątem między wektorami`** α *i* β*, onz.* $\sphericalangle(\alpha, \beta)$.

Zadanie 2 (ŁK 5.14). *Niech* $\langle \, , \, \rangle$ *będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni* V*. Oblicz* $\|u\| + \|v\|$ *oraz* $\|u\| \cdot \|v\|$ *wiedząc, że wektory* $u, v \in V$ *spełniają* $\|u + v\| = 3, \quad \|u - v\| = 2, \quad \cos\sphericalangle(u, v) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3 (ŁK 5.13). *Niech* $\langle \, , \, \rangle$ *będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni* $\mathbb{R}^2$*. Wyznacz* $\min S$ *oraz* $\max S$ *zbioru* $S = \{\langle \, u, v \, \rangle + \langle \, v, w \, \rangle + \langle \, w, u \, \rangle : u, v, w \in \mathbb{R}^2$ *spełniają* $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1\}$.

Zadanie 4 (ŁK 5.15). *Załóżmy, że wektory* $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ *spełniają* $\langle \, v_i, v_j \, \rangle < 0$ *dla* $i \neq j$*, gdzie* $\langle \, , \, \rangle$ *jest pewnym iloczynem skalarnym. Udowodnij, że pewne trzy spośród niech są liniowo niezależne. Czy każde trzy spośród wektorów* v_1, v_2, v_3, v_4 *muszą być liniowo niezależne?*

Zadanie 5. *Na przestrzeni* $V = M_n(\mathbb{R})$ *definiujemy funkcjonał dwuliniowy* $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *dany wzorem:*

$$\langle \, A, B \, \rangle = tr(B^T A).$$

(a) Udowodnij, że $\langle \, , \, \rangle$ *jest iloczynem skalarnym i wskaż (dowolną) bazę ortonormalną tej przestrzeni.*

(b) Niech $(\mathbb{R}^n, \langle \, , \, \rangle_{st})$ *będzie przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym. Wykaż, że dla dowolnej* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *oraz dowolnego* $v \in \mathbb{R}^n$ *zachodzi nierówność*

$$\|Av\| \leqslant \|A\| \cdot \|v\|.$$

Wywnioskuj stąd, że dla każdej rzeczywistej wartości własnej λ *macierzy* A *zachodzi nierównosć*

$$|\lambda| \leqslant \|A\|.$$

(c) $(*)$ *Wykaż, że dla dowolnych* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *zachodzi nierówność*

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Zadanie 6 (ŁK 5.17). *Niech* V *będzie przestrzenią euklidesową. Pokaż, że gdy zbiór* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *jest bazą ortonormalną przestrzeni* V*, zaś wektory* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *spełniają* $\|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2 < 1$*, to zbiór* $\{e_1 + v_1, \ldots, e_n + v_n\}$ *jest bazą przestrzeni* V.

Kilka standardowych zadań rachunkowych

Zadanie 7. *Niech* $W = \mathrm{lin}((5,7,0,2),(1,2,3,1),(2,3,1,1))$ *będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej* $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle_{st})$. *Znaleźć bazę* $W^\perp$.

Zadanie 8. *Niech* W *będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej* $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle_{st})$ *opisaną układem równań:*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0. \end{cases}$$

Znaleźć bazę ortogonalną W *oraz bazę* $W^\perp$.

Zadanie 9. *Dla parametru* $t \in \mathbb{R}$ *funkcjonał dwuliniowy* $h_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest określony wzorem* $h_t((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + (t+1)x_2y_2 + tx_2y_3 + x_3y_1 + tx_3y_2 + x_3y_3$.

- *Znaleźć macierz* $G(h_t, st)$ *funkcjonału* h_t *w bazie standardowej i zbadać dla jakich* $t \in \mathbb{R}$ *funkcjonał* h_t *jest iloczynem skalarnym.*
- *Sprawdzić, ze dla* $V = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,4))$ *funkcjonał* $h = h_1|_{V\times V}$ *będący obcięciem funkcjonału* h_1 *do podprzestrzeni* V *jest iloczynem skalarnym na* V *i znaleźć bazę ortonormalną względem tego iloczynu.*

Zadanie 10. *W przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *dana jest forma dwuliniowa* $h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, *podprzestrzeń* $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$ *oraz rodzina podprzestrzeni* $Z_t = \mathrm{lin}((1,0,t,0),(0,1,0,0))$ *dla* $t \in \mathbb{R}$.

- *Sprawdzić, że forma* h *ograniczona do podprzestrzeni* W *jest iloczynem skalarnym. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni* $(W, h|_W)$ *oraz znaleźć współrzędne wektora* $(0,1,1,1)$ *w otrzymanej bazie przestrzeni* W.
- *Dla jakich* $t \in \mathbb{R}$ *forma* h *ograniczona do podprzestrzeni* Z_t *jest iloczynem skalarnym na przestrzeni* Z_t*?*

Zadanie 11. *W* $\mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym wyznaczyć wzor na przekształcenie:*

- *będące rzutem prostopadłym na* $W = \mathrm{lin}((2,1,0,1),(1,0,0,1))$,
- *będące symetrią prostopadłą względem* W.

Zadanie 12. *Dla każdej z podanych form dwuliniowych* $h : V \times V \to \mathbb{R}$ *znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni* V.

(a) $V = \mathbb{R}^3, h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$,

(b) $V = \mathbb{R}^4, h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_4y_4$.

Zadanie 13. *Niech* $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Znaleźć wszystkie wektory izotropowe oraz podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane w* $(\mathbb{R}^3, h)$. *Podać przykład podprzestrzeni* $W \subseteq \mathbb{R}^3$, *że* $\mathbb{R}^3 \neq W \oplus W^\perp$, *ale* $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 3$.