GAL II*, ćwiczenia 1,

Wektory i wartości własne, wielomian charakterystyczny[1]

Zadania z wykładu

Zadanie 1. *Relacja podobieństwa w zbiorze $M_n(K)$ jest relacją równoważności.*

Zadanie 2. *Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K, to:*

- $r(A) = r(B)$,
- $\det(A) = \det(B)$,
- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Pokaż, że warunki $r(A) = r(B), \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B), \det A = \det B$ nie implikują podobieństwa A, B nad K.

Zadanie 3. *Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$.*

- *Jeśli V jest wymiaru n, to $w_\phi(\lambda)$ jest stopnia n.*
- *Dla dowolnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V mamy:*

$$w_\phi(\lambda) = \det(M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I).$$

- *Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad K oraz $A = M(\phi)_{st}^{st}$, $B = M(\psi)_{st}^{st}$, to*

$$w_\phi(\lambda) = w_\psi(\lambda),$$

- *Jeśli $A = M(\phi)_{st}^{st} \in M_n(K)$, to:*

$$w_\phi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Zadanie 4. *Dla macierzy $A, B \in M_{m\times n}(K)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *B może być otrzymana z A ciągiem operacji elementarnych na wierszach i kolumnach,*

(ii) *istnieje przekształcenie liniowe $\phi : K^n \to K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni K^n i bazy $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni K^m, że $A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, $B = M(\phi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$,*

(iii) $r(A) = r(B)$.

Mówimy wówczas, że A oraz B są ***równoważne*** *nad K.*

Zadanie 5. *Dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : K^n \to K^m$ rzędu r istnieją bazy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ przestrzeni K^n, K^m takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$, gdzie $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz $A = [a_{ij}]$, gdzie*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j = 1, ..., r, \\ 0, & \text{dla pozostałych } i, j. \end{cases}.$$

[1] ŁK - zbiór zadań dr. Kubata, AW - zadania prof. Webera

Zadania (nie tylko) rachunkowe

Zadanie 6 (ŁK, 1.4)**.** *Które z poniższych macierzy:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

są macierzami tego samego endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$*, ale w różnych bazach? Które z powyższych macierzy są macierzami symetrii?*

Zadanie 7 (ŁK 1.21)**.** *Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}), \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Zadanie 8 (ŁK 1.22)**.** *Niech* p *będzie liczbą pierwszą. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_p).$$

Zadanie 9 (ŁK 1.23, mod)**.** *Rozważmy macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Znajdź A^{1000}.

Zadanie 10 (ŁK 1.24)**.** *Niech* $K = \mathbb{Z}_3$ *oraz* $V = K^3$*. Rozważmy endomorfizm* $f \in \mathrm{End}(V)$ *zadany warunkiem*

$$\mathrm{M}_{\mathrm{st}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz macierz} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(K).$$

1. *Znajdź takie bazy* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *przestrzeni* V*, aby* $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = M$*.*
2. *Czy istnieje baza* $\mathcal{C}$ *przestrzeni* V *spełniająca* $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = M$*?*

Zadanie 11 (AW, 3.1)**.** *Znaleźć wartości własne macierzy* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12 (ŁK 1.13)**.** *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $f \in \mathrm{End}(V)$. Wykaż, że:*

1. *gdy $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, to dla dowolnego wielomianu $p \in K[\lambda]$ skalar $p(a)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$.*
2. *jeżeli skalar $p(a)$ jest, dla pewnego $a \in K$, wartością własną endomorfizmu $p(f)$ oraz*

$$p(\lambda) - p(a) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_i) \in K[\lambda],$$

to przynajmniej jeden ze skalarów $a_1, \ldots, a_n \in K$ jest wartością własną endomorfizmu f.

Wskaż przykład takiego endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$, wielomianu $p \in K[\lambda]$ oraz skalara $a \in K$, że skalar $p(a)$ jest wartością własną endomorfizmu $p(f)$, natomiast a nie jest wartością własną endomorfizmu f.

Zadanie 13. *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Pokazać, że macierz $w_B(A)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A, B nie mają wspólnych wartości własnych.*