GAL II* Kolokwium 2, 20 maja 2021

Uwaga: rozwiązania składają Państwo tylko na Moodle.

Zadanie 1. (15p) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń

$$W = \mathrm{lin}((1,-1,0,0),(1,0,-1,0)).$$

Znajdź wzór na rzut prostopadły $\mathbb{R}^4$ na W.
Znajdź obraz wektora $(2,1,1,1)$ w symetrii prostopadłej względem $W^\perp$.

Rozwiązanie. Pójdziemy nieco niestandardową drogą. Niech $p_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie szukanym rzutem prostopadłym oraz niech $v_1 = (1,-1,0,0), v_2 = (1,0,-1,0)$. Dla $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ mamy zatem:

$$p_W(x) = av_1 + bv_2, \qquad (\diamondsuit)$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a, b. Skoro $x - p_W(x)$ jest prostopadły do W, mamy:

$$\langle x - (av_1 + bv_2), v_1\rangle = \langle x - (av_1 + bv_2), v_2\rangle = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że $\|v_1\|^2 = 2, \|v_2\|^2 = 1, \langle v_1, v_2\rangle = 1$, dostajemy:

$$2a + b = \langle x, v_1\rangle, \quad a + 2b = \langle x, v_2\rangle.$$

Rozwiązując ten układ dostajemy:

$$a = \langle x, \frac{2v_1 - v_2}{3}\rangle, \quad b = \langle x, \frac{2v_2 - v_1}{3}\rangle.$$

Mamy natomiast

$$\frac{2v_1 - v_2}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \frac{2v_2 - v_1}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right).$$

W szczególności:

$$a = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \quad b = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3.$$

Za pomocą $(\diamondsuit)$ wyznaczamy zatem obrazy wektorów bazy standardowej przy p_W:

$$\begin{aligned}
p_W(\epsilon_1) &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right),\\
p_W(\epsilon_2) &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right),\\
p_W(\epsilon_3) &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),\\
p_W(\epsilon_4) &= (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Zatem:

$$p_W(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, 0\right).$$

Jeśli chodzi o drugą część, to zauważmy, że biorąc $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ i rozważając rozkład $x = x' + x''$, gdzie $x' \in W, x'' \in W^\perp$ mamy $p_W(x) = x'$ oraz $s_{W^\perp}(x) = -x' + x'' = (\mathrm{id} - 2p_W)(x)$, gdzie $s_{W^\perp}$ jest symetrią prostopadłą względem $W^\perp$. A zatem

$$s_{W^\perp}(2,1,1,1) = (2,1,1,1) - 2p_W(2,1,1,1) = (2,1,1,1) - 2\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right).$$

■

Oczywiście nie mam nic przeciwko rozwiązaniom, w których wyznaczą Państwo bazę $W^\perp$, dopełnią do bazy W, napiszą macierz rzutu w tak otrzymanej bazie, odwrócą macierz 4×4, przemnożą trzy macierze 4×4 i otrzymają macierz rzutu p_W. Ale czy Państwo widzą co tu się tak naprawdę stało?

Zadanie 2. (15p) Dane są macierze $A, B \in M_4(K)$ postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy istnieje taka forma dwuliniowa h na przestrzeni K^4 oraz baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^4 taka, że $G(h, st) = A$ oraz $G(h, \mathcal{A}) = B$? Jeśli baza $\mathcal{A}$ istnieje, wyznacz ją. Odpowiedź uzależnij od własności ciała K.

Rozwiązanie. Zauważmy, że gdy ciało K jest charakterystyki 2, wówczas forma dwuliniowa h_2 opisana w bazie standardowej macierzą B ma własność $h_2((x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$, natomiast są wektory nieizotropowe względem formy dwuliniowej zadanej w bazie standardowej macierzą A. Zatem macierze te nie są kongruentne.

Zauważmy dalej, że $\det A = 9$ oraz $\det B = 1$, czyli nad ciałem charakterystyki 3 macierze A, B nie mogą być kongruentne. W szczególności odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.

Zauważmy dalej, że dla ciał charakterystyki różnej od 2 i 3 mamy łańcuch macierzy kongruentnych:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 - w_1]{k_3 - k_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 - 2w_1]{k_2 - 2k_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_1 - w_4]{k_1 - k_4}$$

$$\xrightarrow[w_1 - w_4]{k_1 - k_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[k_3 + 2k_1]{w_3 + 2w_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 + 3w_3]{k_2 + 3k_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2/3]{k_2/3}$$

$$\xrightarrow[w_2/3]{k_2/3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_3]{k_2 \leftrightarrow k_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 - w_1]{k_2 - k_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

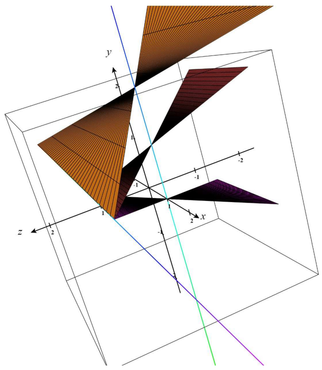
Zatem szukaną bazę $\mathcal{A}$ odczytujemy za pomocą wykonanych operacji elementarnych. ■

Zadanie 3. (15p) Dla podzbiorów H_1, H_2 przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiór:

$$H_3 = \{tp + (1-p)q \,|\, p \in H_1, q \in H_2, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Dla $H_1 = (1,0,1) + \text{lin}((1,1,0)), H_2 = (1,1,2) + \text{lin}((1,1,0))$ znajdź równanie opisujące H_3.
- Dla $H_1 = (2,1,0) + \text{lin}((3,2,1)), H_2 = (2,1,0) + \text{lin}((1,1,4))$ znajdź bazę punktową i układ bazowy przestrzeni H_3.
- Czy dla $H_1 = (0,0,1) + \text{lin}((1,0,0)), H_2 = (1,0,0) + \text{lin}((0,1,0))$ zbiór H_3 jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.

To zadanie jest raczej proste, więc pomijam rachunki. W punkcie trzecim odpowiedź brzmi: NIE. Idea: wybierzmy punkt na prostej H_2 i połączmy go prostymi ze wszystkimi punktami z prostej skośnej H_1 (dla ustalonych $p \in H_1, q \in H_2$ zbiór $\{tp + (1-p)q \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ jest prostą). Dostajemy *prawie płaszczyznę* (bez jednej prostej). Można w ten sposób uzyskać *prawie wszystkie* *prawie płaszczyzny* zawierające H_1 poza jedną – równoległą do H_2. Łącznie dostajemy $\mathbb{R}^3$ bez dwóch *prawie płaszczyzn*.



Zadanie 4. (15p) Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami symetrycznymi spełniającymi równość:

$$tr(A^2B^2) = tr((AB)^2).$$

Wykaż, że $AB = BA$.

Rozwiązanie. Weźmy macierz odwracalną C i niech

$$D = C^{-1}AC, \quad E = C^{-1}BC.$$

Oczywiście $AB = BA$ wtedy i tylko wtedy, gdy $DE = ED$. Podobnie:

$$C^{-2}A^2B^2C^2 = C^{-2}A^2C^2C^{-2}B^2C^2 = D^2E^2.$$

Podobnie (nieco dłużej) pokazujemy, że $C^{-2}(AB)^2C^2 = (DE)^2$. Ślad to niezmiennik podobieństwa, zatem

$$tr(A^2B^2) = tr((AB)^2) \iff tr(D^2E^2) = tr((DE)^2).$$

Na mocy twierdzenia spektralnego możemy zatem ograniczyć się do przypadku, gdzie D jest macierzą diagonalną zaś E jest dowolną macierzą symetryczną. Niech wyraz na przekątnej D znajdujący się w i-tym wierszu to λ_i oraz niech $E = [e_{ij}]$. Będziemy korzystać z tego, że domnażanie z lewej strony przez macierz diagonalną Λ to mnożenie odpowiednich wierszy przez elementy z diagonali Λ, zaś mnożenie z prawej przez Λ to mnożenie kolumn przez elementy z diagonali Λ, Mamy więc:

$$tr(D^2E^2) = tr \begin{bmatrix} \lambda_1^2(e_{11}^2 + e_{12}^2 + \ldots + e_{1n}^2) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2(e_{n1}^2 + e_{n2}^2 + \ldots + e_{nn}^2) \end{bmatrix} = \sum_i \lambda_i^2 \sum_j e_{ij}^2.$$

$$tr(DE)^2 = tr \begin{bmatrix} \lambda_1 e_{11} & \lambda_1 e_{12} & \ldots & \lambda_1 e_{1n} \\ \lambda_2 e_{21} & \lambda_2 e_{22} & \ldots & \lambda_2 e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n e_{n1} & \lambda_n e_{n2} & \ldots & \lambda_n e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 e_{11} & \lambda_1 e_{12} & \ldots & \lambda_1 e_{1n} \\ \lambda_2 e_{21} & \lambda_2 e_{22} & \ldots & \lambda_2 e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n e_{n1} & \lambda_n e_{n2} & \ldots & \lambda_n e_{nn} \end{bmatrix} = \sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j e_{ij}^2.$$

Widzimy zatem, że korzystając z założeń zadania i odpowiednio porządkując składniki mamy:

$$0 = tr(D^2E^2 - (DE)^2) = \sum_{i<j} e_{ij}^2(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0. \qquad (\dagger),$$

czyli dla każdego $i < j$ mamy $e_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$.

Z drugiej strony $DE - ED$ równa jest:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 e_{11} & \lambda_1 e_{12} & \ldots & \lambda_1 e_{1n} \\ \lambda_2 e_{21} & \lambda_2 e_{22} & \ldots & \lambda_2 e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n e_{n1} & \lambda_n e_{n2} & \ldots & \lambda_n e_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 e_{11} & \lambda_2 e_{12} & \ldots & \lambda_n e_{1n} \\ \lambda_1 e_{21} & \lambda_2 e_{22} & \ldots & \lambda_n e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 e_{n1} & \lambda_2 e_{n2} & \ldots & \lambda_n e_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)e_{12} & \ldots & (\lambda_1 - \lambda_n)e_{1n} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)e_{21} & 0 & \ldots & (\lambda_2 - \lambda_n)e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1)e_{n1} & (\lambda_n - \lambda_2)e_{n2} & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Skoro B jest symetryczna, to z równości $(\dagger)$ wnioskujemy, że powyższa różnica to macierz zerowa. ■

Zadanie 5a. (5p) Załóżmy, że W jest taką podprzestrzenią $M_n(K)$, że $tr(AB) = 0$, dla wszystkich $A, B \in W$. Znajdź maksymalny możliwy wymiar W.

Rozwiązanie. Na ćwiczeniach pokazywaliśmy, że forma $h : M_n(K) \times M_n(K) \to K$ zadana wzorem

$$h(A, B) = tr(AB)$$

jest dwuliniowa symetryczna. Problem sprowadza się zatem do zagadnienia znalezienia maksymalnej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej względem tej formy. Twierdzenie z wykładu mówi, że wszystkie maksymalne (ze względu na częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $\dim V/2$. Nietrudno widzieć (chyba też to pokazywaliśmy), że forma $tr(AB)$ jest niezdegenerowana na K – wystarczy bowiem wypisać macierz tej formy w bazie standardowej złożonej z jedynek macierzowych.

Twierdzimy, że przykładem maksymalnej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej $M_n(K)$ względem rozważanej formy jest podprzestrzeń W złożona z macierzy ściśle górnotrójkątnych rozmiaru n:

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Podprzestrzeń ta ma oczywiście wymiar $n(n-1)/2$. Gdyby istniała podprzestrzeń całkowicie zdegenerowana $W' \neq W$ zawierająca W, to do W' należałaby jakaś macierz postaci E_{ij}, gdzie $i > j$ (dlaczego?). Jednak przemnożenie tej macierzy przez $E_{ji} \in W$ daje nam E_{ii}, czyli macierz o śladzie 1. A zatem W jest maksymalną podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną, czyli ma też maksymalny możliwy wymiar. ■

Zadanie 5b. (5p) Pokaż, że dla każdej liczby nieparzystej $d > 0$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że liczba $m^d + 7$ jest podzielna przez 2^n. Czy teza zachodzi również dla $d = 2$?

Rozwiązanie. Korzystamy z pokazanego na wykładzie faktu, że wielomian o współczynnikach w $\mathbb{Z}$ ma pierwiastek w $\mathbb{Z}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma całkowity pierwiastek modulo 2^k, dla każdego $k \geqslant 1$. A zatem szukamy takich d, że $m^d - 7$ ma pierwiastek w $\mathbb{Z}_2$. Do tego zaś, zgodnie z Lematem Hensela, wystarczy, aby wielomian $f_d(m) = m^d + 7$ miał pierwiastek w $\mathbb{Z}_2$, który nie jest pierwiastkiem wielomianu $f_d'(m) = dm^{d-1}$. Kładąc $m = 1$ mamy oczywiście $f_d(m) \equiv 0 \bmod 2$, zaś $f_d'(1) \neq 0$, dla d nieparzystych.

Teza zachodzi również dla $d = 2$, ale lemat Hensela tu nie działa bezpośrednio. Rozumujemy przez indukcję. Oczywiście m^2+7 ma rozwiązanie modulo 2. Załóżmy, że ma rozwiązanie m modulo 2^n. Zachodzi wtedy jedna z dwóch możliwości:

$$m^2 + 7 \equiv 0 \bmod 2^{n+1} \quad \vee \quad m^2 + 7 - 2^n \equiv 0 \bmod 2^{n+1}.$$

Jeśli zachodzi pierwszy przypadek, to krok indukcyjny jest zakończony. Jeśli zachodzi drugi przypadek, to stosujemy następujący trik: zamiast $m + 2^n$ rozważamy liczbę $m + 2^{n-1}$. Mamy:

$$(m + 2^{n-1})^2 \equiv m^2 + 2 \cdot 2^{n-1}x + 2^{2n-2} \equiv (-7 + 2^n) + 2^n \equiv -7 \bmod 2^{n+1}.$$

■

Czy podobnie sztuczki można stosować z powodzeniem dla innych d parzystych? Niestety, równanie m^4+7 nia ma rozwiązania modulo 16. Zjawisko to zrozumieją Państwo lepiej po zapoznaniu się z uogólnioną wersją Lematu Hensela, występującą jako Theorem 4.1 oraz przykładem o numerze 4.3 w znanym tekście: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/hensel.pdf`.

Zadanie 5c. (5p) Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną o śladzie równym 0. Pokaż, że istnieje macierz ortogonalna $Q \in M_2(\mathbb{R})$ taka, że macierz $Q^T AQ$ ma same zera na przekątnej.

Rozwiązanie. Oznaczmy wyrazy macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Jeśli jedna z liczb a, b jest równa 0, to nie ma czego dowodzić. Zatem zakładamy, że a, c są różnych znaków. Rozważmy macierz obrotu o kąt θ postaci

$$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

i zauważmy, że w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie macierzy $P_\theta^T AP_\theta$ stoi liczba postaci:

$$a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta.$$

Różniczkowalna funkcja ciągła $f(\theta) = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta$ przyjmuje dla $\theta = 0$ wartość a, zaś dla $\theta = \pi/2$ przyjmuje wartość c. Wartości te są różnych znaków, zatem z twierdzenia o wartości średniej istnieje takie $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0. Oczywiście macierz $P_{\theta_0}^T AP_{\theta_0}$ ma taki sam ślad jak A, bo P_{θ_0} jest ortogonalna. A zatem na przekątnej macierzy $P_{\theta_0}^T AP_{\theta_0}$ stoją zera. ■

Uwaga. Czy rozmiar ma znaczenie? Czy zamiast $\mathbb{R}$ może być $\mathbb{C}$? A co z symetrycznością!? Odpowiedź: V.S. Sunder: On Trace Zero Matrices: `https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/007/06/0014-0026`.

Zadanie 5d. (5p) Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami symetrycznymi, których wszystkie wartości własne są większe niż 1. Pokaż, że dla każdej rzeczywistej wartości własnej γ macierzy AB mamy $|\gamma| > 1$.

Rozwiązanie. (IMC 2013) Rozważmy $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle_{st})$. Weźmy bazę ortonormalną $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ złożoną z wektorów własnych macierzy B w $\mathbb{R}^n$ oraz weźmy dowolny wektor $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ mający w tej bazie współrzędne $a_1, \ldots, a_n$ Mamy zatem (dzięki ortonormalności $\mathcal{A}$):

$$\begin{aligned}\|B\alpha\|^2 &= \|B(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n)\|^2 = \\ &= \|\lambda_1 a_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n a_n \alpha_n\|^2 = \\ &= \langle \lambda_1 a_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n a_n\alpha_n, \lambda_1 a_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_n a_n \alpha_n\rangle = \\ &= \lambda_1^2 a_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 a_n^2 > a_1^2 + \ldots + a_n^2 = \|\alpha\|^2.\end{aligned}$$

Zatem przemnożenie przez B z lewej strony powiększa, normę dowolnego niezerowego wektora. Podobnie przemnożenie przez A powiększa normę wektora. A zatem dla każdego $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$ mamy $\|AB\alpha\| > \|\alpha\|$. Jeśli więc $\|AB\beta\| = \sqrt{\langle\lambda\beta, \lambda\beta\rangle} = |\lambda|\|\beta\|$, dla pewnego $\beta \neq 0$, to $|\lambda| > 1$. ∎

Uwaga. Wiadomo, że $(AB)^T = B^T A^T$, a zatem iloczyn macierzy symetrycznych nie musi być symetryczny, jeśli $AB \neq BA$. Swoją drogą: proszę spróbować udowodnić następujący fakt: każdą rzeczywistą lub zespoloną macierz kwadratową można przedstawić jako iloczyn macierzy symetrycznych. Idea: zacząć od klatek Jordana. Patrz też: A. J. Bosch, *The Factorization of a Square Matrix Into Two Symmetric Matrices*, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 6 (1986), pp. 462-464.

Zadanie 6. (20p) Rozważmy izometrię ϕ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^5, \langle,\rangle)$ (nie znamy tego iloczynu) daną w bazie standardowej macierzą:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Pokaż, że ϕ nie jest ani symetrią prostopadłą, ani obrotem.
- Pokaż, że ϕ można przedstawić jako złożenie trzech symetrii prostopadłych.
- Pokaż, że jeśli σ jest izometrią przestrzeni euklidesowej V wymiaru n taką, że

  $$\dim\ker(\sigma - \mathrm{id}) = n - s,$$

  to σ nie można przedstawić jako złożenia mniej niż s symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni wymiarów $n-1$ (takie symetrie prostopadłe nazwaliśmy odbiciami).

Rozwiązanie (a). Niech $M(\phi)_{st}^{st} = M$. Zauważmy, że $M^2 \neq I$. Istotnie, przemnożenie pierwszego wiersza oraz drugiej kolumny daje wynik 10. Zatem ϕ nie jest symetrią. Aby się przekonać, że ϕ nie jest obrotem można pójść co najmniej dwiema drogami.

- Można policzyć wyznacznik M (co nawet przy zauważeniu wygodnej postaci blokowej i skorzystaniu z faktów znanych z ćwiczeń zajmie dłuższą chwilę) i zobaczyć, że wynosi on -1. Wyznacznik obrotu to zawsze 1, więc ϕ nie jest obrotem.
- Można policzyć ślad M. Wynosi on (jak widać) 3. Wiadomo natomiast, że ślad macierzy obrotu w przestrzeni pięciowymiarowej wynosi $2\cos\alpha + 3$, gdzie α to kąt obrotu (bo w pewnej bazie ortonormalnej $\mathbb{R}^5$ obrót ma postać...). A zatem $\cos\alpha = 0$, czyli obrót jest o $\pi/2$. To by jednak znaczyło, że $M^4 = I$ (jeśli ta równość zachodzi w pewnej bazie, to zachodzi w każdej bazie). Zdobywając się więc na pewien wysiłek wyliczamy pierwszy wiersz i drugą kolumnę macierzy M^2:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 & 6 & 0 \\ & 1 & & & \\ & 6 & & & \\ & -8 & & & \\ & 0 & & & \end{bmatrix}$$

  i stwierdzamy, że ich wymnożenie daje: 20, czyli $M^4 \neq I$ i nasze przekształcenie nie jest obrotem.

Rozwiązanie (b). Nietrudno widzieć, że $r(M-I)=3$, a więc podprzestrzeń własna ϕ odpowiadająca wartości własnej 1 jest dwuwymiarowa[1] i jest rozpięta przez pewne niezerowe wektory $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathrm{lin}(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)=V'$. Oczywiście $\phi'=\phi|_{V'}$ jest izometrią i $\phi'(\alpha)=\alpha$, a zatem identycznie jak w dowodzie twierdzenia Cartana stwierdzamy, że $V'_{(1)}$ jest **ϕ'-niezmienniczą podprzestrzenią** V' (to jest w zasadzie tw. Witta o przedłużaniu!). W szczególności $\phi'|_{\mathrm{lin}(\alpha,\beta)^\perp}$ jest też izometrią. Niech γ_1,γ_2 rozpinają $\mathrm{lin}(\alpha,\beta)^\perp$. W bazie $\{\gamma_1,\gamma_2,\alpha_1,\alpha_2,\epsilon_5\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^5$ izometria ϕ ma więc macierz:

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Czym jest izometria $\phi'|_{\mathrm{lin}(\alpha,\beta)^\perp}$? To może być obrót lub symetria. Ale w drugim przypadku oznaczałoby to, że $\phi'|_{\mathrm{lin}(\alpha,\beta)^\perp}$ ma rzeczywiste wartości własne ±1. Tymczasem[2] $r(A+I)=4$. A zatem $\phi'|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp}$ jest, jako obrót, złożeniem dokładnie dwóch symetrii. Po ich oczywistym przedłużeniu na całą $\mathbb{R}^5$ (na $\mathrm{lin}(\alpha,\beta,\epsilon_5)$ kładziemy id) rozkład wyżej daje nam rozkład ϕ na 3 odbicia. Dowód (b) jest zakończony.

Rozwiązanie (c). Niech σ będzie izometrią n wymiarowej przestrzeni euklidesowej V. Załóżmy, że

$$\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r,$$

gdzie τ_i jest symetrią V względem pewnej przestrzeni $n-1$-wymiarowej H_i. Musimy pokazać, że $r \geqslant s$. Skoro τ_i są stałe po obcięciu do H_i, to ich złożenie: σ jest stałe na $H_1\cap\ldots\cap H_r$, czyli mamy:

$$H_1\cap\ldots\cap H_r \subseteq \ker(\sigma-\mathrm{id}),$$

a zatem $\dim(H_1\cap\ldots\cap H_r)\leqslant n-s$. Z drugiej strony nietrudno widzieć, że przecięcie dwóch podprzestrzeni wymiaru $n-1$ w V ma wymiar nie mniejszy niż $n-2$, co przez prostą indukcję prowadzi do obserwacji:

$$\dim(H_1\cap\ldots\cap H_r)\geqslant n-r,$$

a w konsekwencji dostajemy $n-r\leqslant n-s$, czyli $s\leqslant r$. Dowód jest zakończony.

Komentarze. Można zapytać czy ograniczenie dolne z punktu (c) jest zawsze osiągalne? Jest to nietrudny wniosek z twierdzenia klasyfikującego izometrie n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Przypomnijmy to twierdzenie (było na ćwiczeniach, a wynika łatwo na przykład z zespolonego twierdzenia spektralnego).

Twierdzenie. Niech $(V,\langle,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową wymiaru n i niech $\phi\in\mathrm{End}(V)$ będzie izometrią. Wówczas istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ przestrzeni $(V,\langle,\rangle)$, w której macierz ϕ ma postać:

$$M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-s_1-2s_2},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{s_1},O_{\theta_1},\ldots,O_{\theta_{s_2}}), \qquad (*)$$

gdzie dla $i=1,\ldots,s_2$ istnieją takie $\theta_i\in\mathbb{R}$, że:

$$O_{\theta_i}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix}.$$

Każdy obrót jest złożeniem 2 symetrii prostopadłych, więc jest jasne, że powyższe przekształcenie jest złożeniem s_1+2s_2 symetrii, a liczba ta jest dokładnie równa wymiarowi $\ker(\phi-\mathrm{id})$, czyli liczbie jedynek na przekątnej macierzy $(*)$.

Czy da się powiedzieć jak wygląda iloczyn skalarny, w którym tytułowa macierz 5×5 jest izometrią? I tak (bo to tylko kwestia wykonania rachunków), i nie (bo to żmudne rachunki). Macierz wziąłem z rozdziału 5. artykułu `https://arxiv.org/pdf/1011.1027.pdf`, opublikowanego w (stosunkowo) porządnym czasopiśmie matematycznym, ukazującym się jednakże zbyt często i w zbyt obszernych tomach (raz na dwa tygodnie kilkaset stron artykułów – to nie może być dobry znak, i zwykle nie jest). Autorzy zdają się twierdzić, że wyjściowa macierz jest to macierzą ortogonalną względem iloczynu skalarnego (zdefiniowanego na dole strony 4, co akurat jest ciekawą konstrukcją) w bazie standardowej wzorem:

$$\langle(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\rangle = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5.$$

Moim zdaniem w rachunkach tych jest błąd, co nie ma wpływu na wyniki pracy. Jej celem jest podanie kolejnego konstruktywnego dowodu tw. Cartana, opartego o ważny obiekt – algebry Clifforda.

[1] Nie trzeba było liczyć wielomianu charakterystycznego, ale można: ma on postać $-(\lambda-1)^4(1+\lambda)$.

[2] Próbuję Państwa przekonać, że nie trzeba było liczyć wyznacznika M.