

# GAL II\* Kolokwium 1, 15 kwietnia 2021, rozwiązania i komentarze

**Zadanie 1. (15p)** Rozważmy endomorfizm  $\phi$  przestrzeni  $\mathbb{C}^4$  dany w bazie standardowej macierzą:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(5p) Wyznacz macierz  $\phi$  w postaci Jordana.

(5p) Wyznacz  $A^{100}$ .

(5p) Wyznacz dowolną macierz  $B$  taką, że  $B^2 = A$ .

**ROZWIĄZANIE.** Macierz  $A$  jest blokowo górnotrójkątna i oczywiście jej wielomian charakterystyczny to  $(\lambda^2 + 1)^2 = (x - i)^2(x + i)^2$ . A zatem  $\phi$  ma wartości własne  $i$  oraz  $-i$ . Mamy też:

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}, \quad (A - iI)^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2i & -2i & 2 \\ 2i & -2 & -2 & -2i \\ 0 & 0 & -2 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & -2 \end{bmatrix},$$

co oznacza, że  $r(A - iI) = 3$ ,  $r(A + iI) = 2$ . A zatem mamy jedną klatkę Jordana rozmiaru 2 odpowiadającą wartości własnej  $-i$ . Również wartości własnej  $i$  odpowiada klatka rozmiaru 2. Czy umiemy to Państwo pokazać bez wykonywania ponownych rachunków? Pierwsza część rozwiązania jest zakończona.

Druga i trzecia część zwykle wymagają użycia postaci Jordana (i co za tym idzie) wyznaczenia bazy.

Można było jednak tego uniknąć. Zauważmy, że kładąc:  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  mamy  $A = \begin{bmatrix} C & I \\ 0 & C \end{bmatrix}$  oraz:

$$A^n = \begin{bmatrix} C^n & nC^{n-1} \\ 0 & C^n \end{bmatrix}$$

Macierz  $C$  to tymczasem macierz obrotu o  $3\pi/2$ , czyli jej setna potęga to macierz obrotu o kąt  $150\pi$ , czyli  $I$ . A nawet jeśli nie widzieliśmy tego obrotu, to widać, że  $C^2 = -I$ . Mamy więc  $C^{99} = -C$ , czyli:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Również trzeci punkt robi się teraz bardzo łatwo. Trzeba tylko wpaść na to, że tak naprawdę szukamy macierzy blokowych  $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{bmatrix}$  o blokach  $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$  takich, że  $\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & X \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} C & I \\ 0 & C \end{bmatrix}$ , czyli:

$$X^2 = C, \quad XY + YX = I.$$

Te równania można bez większego trudu rozwiązać. Wiedząc, że  $C$  to macierz obrotu o  $3\pi/2$  jest jasne, że jeden z jej pierwiastków to macierz obrotu o  $3\pi/4$ , która ma postać:

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Można też liczyć ręcznie; dla  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  mamy układ:  $a^2 + bc = 0, ab + bd = 1, ac + cd = -1, bc + d^2 = 0$ .

Stąd  $a^2 = d^2$ . Nie może być  $a = -d$ , bo wtedy w drugim równaniu mamy  $0 = 1$ . Czyli  $a = d$ . Wtedy układ przybiera postać:  $a^2 + bc = 0, 2ab = 1, 2ac = -1$ , co natychmiast daje na przykład (inną) postać:

$$X = \begin{bmatrix} i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Teraz rozwiązujemy równanie liniowe  $XY + YX = I$  na wyrazy  $Y$ , dostając (przy drugiej wersji  $X$ ):

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/4 & -i\sqrt{2}/4 \\ i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/4 & -i\sqrt{2}/4 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (*).$$



Rozwiązanie jest zakończone. A jeśli przyjdzie nam do głowy korzystanie z postaci Jordana? Zapiszemy  $A = C^{-1}JC$ , gdzie  $J$  jest postacią Jordana  $A$ , zaś  $C^{-1}$  jest macierzą mającą w kolumnie wektory bazy Jordana. Wtedy  $A^{100} = C^{-1}J^{100}C$ . Trzeba zacząć od wyznaczenia bazy Jordana. W skrócie, mamy:

$$\begin{aligned} \ker(\phi - i \operatorname{id})^2 &= \operatorname{lin}((1, i, 0, 0), (0, 0, 1, i)), & (\phi - i \operatorname{id})(0, 0, 1, i) &= (1, i, 0, 0), \\ \ker(\phi + i \operatorname{id})^2 &= \operatorname{lin}((1, -i, 0, 0), (0, 0, 1, -i)), & (\phi + i \operatorname{id})(0, 0, 1, -i) &= (1, -i, 0, 0). \end{aligned}$$

A zatem po krótkich rachunkach:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

Teraz podnosimy do potęgi 100 klatki Jordana  $J_1, J_2$  macierzy Jordana  $J$  endomorfizmu  $\phi$ , aby dalej skorzystać z zależności:

$$J^{100} = \begin{bmatrix} J_1^{100} & 0 \\ 0 & J_2^{100} \end{bmatrix}.$$

Nietrudno widzieć (ten sam motyw, co przy potęgach postaci blokowej  $A$ ), że:

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} i^n & i^{n-1}n \\ 0 & i^n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-i)^n & (-i)^{n-1}n \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix},$$

czyli (zgodnie z oczekiwaniami):

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -100i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak znaleźć teraz  $\sqrt{A}$ ? Wystarczy znaleźć  $\sqrt{J}$ , bo wtedy  $\sqrt{A} = C^{-1}\sqrt{J}C$ . A zatem wystarczy w istocie znaleźć pierwiastki z klatek Jordana w  $J$ . Można to zrobić ręcznie, albo wyznaczyć moltiplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya (sic!) na iloczyn (przemienny!) macierzy diagonalnej i unipotentnej:

$$J_1 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a dla czynników łatwo znaleźć pierwiastki: czyli (dzięki przemienności!)

$$\sqrt{J_1} = \begin{bmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\zeta_8$  pierwiastek stopnia 8 z 1 postaci:  $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ . Podobnie wyznaczamy:

$$\sqrt{J_2} = \begin{bmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta postać w zupełności mi wystarczy, ale można też wszystko pomnożyć i dostać postać (\*).

\* \* \*

**KOMENTARZ.** Struktura blokowa macierzy endomorfizmu, jeśli ją dostrzeżemy, ukazuje ukrytą geometrię przekształcenia. Twierdzenia klasyfikacyjne (typu Jordana) pokazują jak musi wyglądać geometria dowolnego endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad  $\mathbb{C}$ , ale czasem warto spojrzeć „poza kanon”. Po to wprowadziliśmy podprzestrzenie niezmiennicze i twierdzenia związane z blokowo-diagonalnymi formami kanonicznymi Jordana, Frobeniusa itd., aby mieli Państwo przede wszystkim tę myśl w głowie: szukamy struktury blokowej, bo pozwala ona rozbić skomplikowane przekształcenie  $\phi$  na kilka prostszych i nierzadko działających niemal niezależnie od siebie (przy postaci blokowo-diagonalnej mamy rozkład  $\phi$ -niezmienniczy i na każdej składowej niezmienniczej  $\phi$  działa niezależnie od pozostałych tzn. zmieniając  $\phi$  tylko na tej podprzestrzeni nie wprowadzamy żadnych zmian w działaniu  $\phi$  na pozostałych składowych). W zadaniu nie widać wprawdzie od razu składowych  $\phi$ -niezmienniczych (są nimi podprzestrzenie cykliczne  $C_1, C_2$ , w których macierze  $\phi|_{C_i}$  są klatkami Jordana), ale w zamian działanie  $\phi$  na  $\operatorname{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  oraz działanie przekształcenia indukowanego  $\bar{\phi} : V/\operatorname{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow V/\operatorname{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  są identyczne – są to obroty.

**Zadanie 2. (15p)** Forma dwuliniowa  $h$  zadana jest na przestrzeni  $V = \mathbb{R}^3$  przy pomocy macierzy

$$G(h, st) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (9p) Wyznacz bazę prostopadłą przestrzeni  $(V, h)$ . Czy  $(V, h)$  ma bazę złożoną z wektorów izotropowych?  
 (6p) Pokaż, że są dokładnie dwie podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane wymiaru 2 w  $(V, h)$ .

ROZWIĄZANIE. Szukamy wektora nieizotropowego w  $V$ . Dostrzegamy go od razu widząc, że na przekątnej  $G(h, st)$  jest wartość 4 =  $h(\epsilon_2, \epsilon_2)$ . Niech więc pierwszy wektor szukanej bazy prostopadłej to  $v_1 = (0, 1, 0)$ . Zbiór wektorów prostopadłych do  $v_1$  postaci  $x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + x_3\epsilon_3$ , gdzie  $st = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ , opisany jest warunkiem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0.$$

Zatem  $\text{lin}(v_1)^\perp = \text{lin}((1, 0, -2), (0, 1, -4))$ . Biorąc  $v_2 = (1, 0, -2)$  mamy  $h(v_2, v_2) = -4$  oraz  $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp$  opisana jest równaniami:  $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, -2x_1 + x_3 = 0$ , a więc  $\text{lin}(v_1, v_2)^\perp = \text{lin}(1, -1, 2)$ . Biorąc  $v_3 = (1, -1, 2)$  dostajemy szukaną bazę prostopadłą  $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ , w której  $h$  ma macierz:

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przestrzeń  $V$  ma oczywiście bazę złożoną z wektorów izotropowych. Patrząc na powyższą postać diagonalną widać natychmiast, że biorąc układ:  $\mathcal{B} = (v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_3)$  mamy:

$$G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z postaci macierzy  $G(h, \mathcal{B})$  natychmiast odczytujemy dwie podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane wymiaru 2, czyli  $\text{lin}(v_1 + v_2, v_3), \text{lin}(v_1 - v_2, v_3)$ . Trzeba pokazać, że nie ma innych przestrzeni całkowicie zdegenerowanych wymiaru 2. Mając bazę prostopadłą  $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$  widzimy, że wektor izotropowy postaci  $av_1 + bv_2 + cv_3$  spełnia  $a^2 = b^2$ , czyli  $a = b$  lub  $a = -b$ . Rozważmy dowolną podprzestrzeń całkowicie zdegenerowaną  $U$  wymiaru 2. Twierdzimy, że  $v_3 \in U$ . Baza prostopadła tej przestrzeni złożona jest z pewnych wektorów  $a'v_1 \pm a'v_2 + c'v_3$  oraz  $a''v_1 \pm a''v_2 + c''v_3$ , dla pewnych  $a', a'' \neq 0$  oraz  $c', c''$ . Odpowiednio skalując można zatem przyjąć, że  $a' = a'' = 1$ . Dodając, lub odejmując te wektory i ponownie skalując widzimy, że w istocie nasza przestrzeń całkowicie zdegenerowana ma postać:

$$U = \text{lin}(v_1 + v_2 + c'v_3, v_1 - v_2 + c''v_3),$$

gdzie  $c' \neq c''$  (inaczej  $v_1$  lub  $v_2$  trafiają do  $U$ , a one nie są izotropowe). Zatem  $(c' - c'')v_3 \in U$ , czyli  $U$  zawiera  $v_3$ . Stąd jednak jest jasne, że  $v_1 + v_2 \in U$  lub  $v_1 - v_2 \in U$ . A zatem, zgodnie z oczekiwaniami, możliwe są tylko dwie dwuwymiarowe całkowicie zdegenerowane (podane wyżej). ■

\* \* \*

**KOMENTARZ.** Badając formy dwuliniowe koncentrowaliśmy się dotąd zasadniczo na szukaniu bazy ortogonalnej oraz określaniu jakie elementy znaleźć się mogą na przekątnej macierzy formy w takiej bazie. Istotnym problemem jest również określenie na ile destrukcyjna może być dana forma, a więc jaki jest wymiar maksymalnej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej. Liczbę tę nazywa się indeksem izotropii przestrzeni dwuliniowej. Na ćwiczeniach rozstrzygnęliśmy ten problem dla form symetrycznych nad  $\mathbb{Z}_2$ , co pozwoliło rozwiązać całkiem niebanalny problem *Eventown*. Okazuje się, że dla niezdegenerowanej symetrycznej formy dwuliniowej nad ciałem charakterystyki różnej od 2 wszystkie maksymalne podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane mają ten sam wymiar. Jak wygląda ogólnie struktura takich przestrzeni i ich położenie w całej przestrzeni? Więcej o tym powie nam tzw. rozkład Witt'a. Okazuje się, że przestrzeń dwuliniową symetryczną można przedstawić jako sumę prostą trzech podprzestrzeni, z których dwie są całkowicie zdegenerowane (w pewnym sensie bliźniacze), a w na trzeciej – prostopadłej do sumy poprzednich działa tw. Jacobiego (tzw. przestrzeń anizotropowe, gdzie  $h(v, v) \neq 0$ , dla  $v \neq 0$ ).

**Zadanie 3. (15p)** Niech  $a \in \mathbb{R}$ . Dla  $n > 1$  formy  $h_a$  zadane są na przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  macierzami postaci:

$$G(h_a, st) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}.$$

(5p) Pokaż, że dla  $a > 2$  forma  $h_a$  jest iloczynem skalarnym.

(5p) Znajdź sygnaturę formy  $h_1$ .

(5p) Rozważ przestrzeń  $V = (K^n, h_a)$ , gdzie  $K$  – ciało. Pokaż, że dla  $a \neq 1$  mamy  $\dim V^\perp \leq 1$ .

ROZWIĄZANIE. Niech  $A_n = G(h_1, st)$ , dla  $h_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wystarczy sprawdzić dla jakich  $a$  dla dowolnego niezerowego wektora  $v \in \mathbb{R}^n$  mamy  $h_a(v, v) > 0$ . Robimy to (niemal) wprost z definicji: niech  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Wtedy dla dowolnego  $a$  wartość  $h_a(v, v) = v^T A_n v$  równa jest:

$$a(v_1^2 + \dots + v_n^2) + 2v_1v_2 + 2v_2v_3 + \dots + 2v_{n-1}v_n = (a-2)(v_1^2 + \dots + v_n^2) + v_1^2 + (v_1+v_2)^2 + \dots + (v_{n-1}+v_n)^2 + v_n^2 > 0.$$

Jest więc jasne, że dla  $a > 2$  forma  $h_a$  jest iloczynem skalarnym. Można też rozwiązać ten punkt korzystając z kryterium Sylwestera, wyprowadzając z rozwinięcia Laplace'a rekurencję<sup>1</sup>:  $|A_n| = a|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ .

Jeśli chodzi o sygnaturę  $h_1$ , to trzeba (chyba) nieco pokombinować, lub zgadnąć rozkład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{n-3} \end{bmatrix}$$

Istotnie, wykonujemy operacje elementarne na wierszach i (analogiczne) operacje na kolumnach  $A_n$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2-k_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4-w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{k_4-k_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2-w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix} \xrightarrow{k_2-k_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{bmatrix}$$

W rezultacie  $A_n \cong \text{diag}(1, -1, 1, A_{n-3})$ . Stąd już łatwo dostajemy:  $s(h_1) = \begin{cases} n/3, & n = 0 \pmod{3}, \\ \lfloor n/3 \rfloor + 1, & n = 1, 2 \pmod{3}. \end{cases}$

W ostatnim punkcie badamy wektory, które są prostopadłe do wszystkich wektorów przestrzeni  $V$  względem formy  $h_a$ . Element  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  należy do  $V^\perp$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadły do każdego wektora bazy standardowej przestrzeni  $K^n$ . A zatem  $V^\perp$  opisane jest jednorodnym układem:

$$av_1 + v_2 = 0, v_1 + av_2 + v_3 = 0, \dots, v_{n-2} + av_{n-1} + v_n = 0, v_{n-1} + av_n = 0.$$

Wystarczy zatem pokazać, na mocy tw. Kroneckera-Capellego, że rząd macierzy  $A_n = G(h_a, st)$  tej formy jest nie mniejszy niż  $n - 1$ . To jest jednak oczywiste, niezależnie od ciała (i niezależnie od  $a$ ). ■

\* \* \*

**KOMENTARZ.** Znajdowanie sygnatury rzeczywistej symetrycznej macierzy trójdiagonalnej to w ogólności problem bardzo trudny i wciąż aktualny (rzecz jasna gdy, jak wyżej, nie działa twierdzenie Jacobiego). Nawet badanie wartości własnych takich macierzy nie jest wcale łatwe. Polecam opracowanie (Google it): É. Ghys, A. Ranicki: *Signatures in algebra, topology and dynamics* (raczej tylko drugi rozdział).

<sup>1</sup>Dla macierzy trójdiagonalnej  $T_n$  rozmiaru  $n \times n$ , mającej na przekątnej wyraz  $a$ , nad przekątną:  $b$ , oraz pod przekątną:  $c$  mamy  $|T_n| = a|T_{n-1}| - bc|T_{n-2}|$ . Dla  $a = 1$  oraz  $bc = -1$  dostajemy Sami Wiemy Co. Jeśli zaś przekątne nie są stałe, to...

**Zadanie 4. (15p)**(2p) Udowodnij, że dla macierzy  $X \in M_2(K)$  nad ciałem  $K$  mamy  $X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)I = 0$ .(5p) Pokaż, że  $\det(X) = 0$ , gdzie  $X \in M_2(\mathbb{R})$  spełnia, dla pewnego całkowitego  $n > 2$ , równanie:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(8p) Pokaż, że istnieje tylko jedna macierz  $X \in M_2(\mathbb{Z}_5)$  taka, że:

$$X^5 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

ROZWIĄZANIE. Pierwsza część była na wykładzie, ale wystarczy zauważyć, że jeśli  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , to

$$X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)I = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przechodzimy do drugiej części. Aby pokazać, że  $\det(X) = 0$  obłożmy wyjściową równość wyznacznikiem. Mamy:  $\det(X^n + X^{n-2}) = \det(X)^{n-2} \det(X^2 + I) = 0$ . Jeśli jednak  $\det(X^2 + I) = 0$ , to przechodząc do wielomianów zespolonych mamy:  $\det(X - iI) \det(X + iI)$ . A zatem  $i$  lub  $-i$  są wartościami własnymi  $X$ . To jednak oznacza, że obydwie te liczby są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego  $X$ , który jest rzeczywisty. Wielomian ten ma stopień 2, a więc musi mieć postać  $\lambda^2 + 1$ . Stąd jednak mielibyśmy  $X^2 + I = 0$ , co znaczyłoby, że lewa strona wyjściowego równania to macierz 0, co jest niemożliwe.

*Uwaga.* Teraz możliwe jest rozwiązanie wyjściowego równania (zadanie pochodzi z Olimpiady w Rumunii). Otóż stwierdzamy, że wobec  $\det(X) = 0$  wielomian charakterystyczny macierzy  $X$  ma postać  $\lambda^2 - \text{tr}(X)\lambda$ , czyli na mocy tw. C-H mamy  $X^2 = \text{tr}(X)X$ . Zatem mamy:  $X^n + X^{n-2} = (\text{tr}(X)^{n-1} - \text{tr}(X)^{n-3})X$ . Przechodzimy do śladu macierzy po obydwu stronach. Po lewej ślad wynosi 2 (patrz wyjściowe równanie), a po prawej jest to oczywiście  $\text{tr}(X)^n - \text{tr}(X)^{n-2}$ . A zatem liczba  $\text{tr}(X)$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^n + x^{n-2} - 2$ . Teraz już przechodzimy do analizy. Dla  $n$  parzystego okazuje się, że  $\text{tr}(X)$  może być równe jedynie  $-1$  oraz  $1$  (dlaczego?). Dla  $n$  nieparzystych jedynym zerem rozważanego wielomianu jest  $1$ . A zatem wyznaczyliśmy ślad i wyznacznik macierzy  $X$ , co daje trzy rozwiązania wyjściowego równania.

Przechodzimy do części trzeciej. *Sposób 1.* Zauważmy, że ślad i wyznacznik macierzy  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  to odpowiednio: 0 oraz 1. Szukamy macierzy rozmiaru  $2 \times 2$ , która w piątej potędze ma taki ślad i wyznacznik. To oznacza, na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona, że  $(X^5)^2 + I = 0$ . Zatem  $A^2 + I = 0$ . Czyli  $A^5 = A$ . Zatem  $A$  jest rozwiązaniem postawionego równania. Zauważmy dalej, że  $\det X^5 = 1$ , a równanie  $x^5 = 1$  ma w  $\mathbb{Z}^5$  jedynie rozwiązanie  $x = 1$ . Zatem równanie Cayleya-Hamiltona dla macierzy  $X$  ma postać:  $X^2 - \text{tr}(X)X + I = 0$ . Podnosimy całość do potęgi piątej:

$$X^{10} = (\text{tr}(X) - I)^5,$$

co nad ciałem  $\mathbb{Z}_5$  jest równe po prostu  $\text{tr}(X)^5 X - I$  (bo  $I$  jest przemienna z  $X$  oraz zachodzi cudowna tożsamość  $(x+y)^5 = x^5 + y^5$ ). Co więcej, w ciele  $\mathbb{Z}^5$  mamy  $x^5 = x$ , więc tak naprawdę  $X^{10} = \text{tr}(X)X - I$ . Ale przecież  $X^{10} = A^2 = -I$ , czyli  $\text{tr}(X)X = 0$ , co oznacza  $\text{tr}(X) = 0$ . A zatem  $X^2 = -I$ , czyli  $X^5 = X = A$ .

*Sposób 2.* Biorąc  $m = \text{tr}(X)$ , iterujemy trzykrotnie znane nam równanie  $X^2 - mX + I = 0$  dostając:

$$X^5 = X^3(mX - I) = mX^4 - X^3 = mX^2(mX - I) - X(mX - I) = \dots = (m^4 - 3m^2 + 1)X - (m^3 - 2m)I. \quad (\dagger)$$

Przechodzimy do śladu macierzy po obydwu stronach. Mamy

$$\text{tr}(X^5) = m(m^4 - 3m^2 + 1) - 2(m^3 - 2m) = m^5 = m,$$

skąd  $m = 0$  (wiemy ile wynosi ślad  $X^5$ ). Zatem wracając do  $(\dagger)$  mamy  $X^5 = X$ , czyli  $X = A$ .

*Sposób 3.* Skoro  $A$  spełnia wyjściowe równanie to można pokazać, że dowolne inne rozwiązanie  $X$  musi mieć te same wartości własne, co macierz  $A$  (stwierdzamy najpierw, że  $X$  ma te same wartości własne, co  $X^5$ ). Ale  $A$  ma dwie różne wartości własne: 2, 3. A zatem  $X$  musi być również diagonalizowalna. Natomiast dla macierzy diagonalizowalnej  $X$  nad  $\mathbb{Z}_5$  mamy  $X^5 = X$ , co daje znowu  $X = A$ . ■

**Zadanie 5a. (5p)** Niech  $V$  będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym  $\langle, \rangle$  oraz niech  $W \subseteq V$  będzie podprzestrzenią. Pokaż, że dla każdego  $v \in V$  wektor  $u \in W$  jest obrazem  $v$  przy rzucie prostopadłym na  $W$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $w \in W$  mamy  $\|v - u\| \leq \|v - w\|$ , gdzie  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

ROZWIĄZANIE. Niech  $V = W \oplus W^\perp$  i niech  $v = u + u'$ , gdzie  $u' \in W^\perp$ . Wówczas  $v - u \in W^\perp$ . Dla każdego  $w \in W$  mamy  $u - w \in W$ , a więc  $\langle u - v, u - w \rangle = 0$ . Z tw. Pitagorasa  $\|v - w\|^2 = \|v - u\|^2 + \|u - w\|^2$ , czyli  $\|v - u\| \leq \|v - w\|$ . Z drugiej strony, założmy, że  $u$  jest elementem  $W$  spełniającym nierówność  $\|v - u\| \leq \|v - w\|$ , dla każdego  $w \in W$ , ale to  $t \neq u$  jest rzutem prostopadłym wektora  $v$  na  $W$ , czyli  $v = t + t'$ , dla pewnego  $t' \in W$ . Wówczas  $(v - t) \perp (t - u)$ , czyli wobec przypuszczenia  $\|t - u\| \neq 0$  mamy, ponownie z tw. Pitagorasa:  $\|v - u\|^2 = \|v - t\|^2 + \|t - u\|^2 > \|v - t\|^2$ , sprzeczność z wyborem  $u$ . ■

**Zadanie 5b. (5p)** Wyznacz postać Jordana endomorfizmu nilpotentnego  $\phi$  spełniającego warunki:

$$\begin{cases} \dim \ker \phi^2 & = 7 \\ \dim \ker \phi^5 & = 14 \\ \dim(\ker \phi^5 \cap \text{im } \phi^5) & = 1 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE. Niech  $\phi \in \text{End}(V)$ . Przyjrzyjmy się diagramowi Younga odpowiadającemu endomorfizmowi nilpotentnemu  $\phi$ . Warunki zadania tłumaczą się następująco w języku tego diagramu:

- w pierwszych dwóch kolumnach od lewej jest 7 pól,
- w pierwszych pięciu kolumnach od lewej jest 14 pól,
- jest dokładnie jeden wiersz długości 6.

Ostatni warunek bierze się stąd, że gdyby diagram miał tylko 5 kolumn, to mielibyśmy  $\ker \phi^5 = V$ , ale wtedy  $\text{im } \phi^5 = 0$ , co przeczy trzeciemu warunkowi. Z drugiej strony, w każdym wierszu długości co najmniej 6 biorąc element z  $5 + k$ -tej kolumny widzimy, że jego obraz przy  $\phi^5$  jest w tym wierszu na pozycji  $k$ . Elementy bazy Jordana wpisanej w diagram Younga są liniowo niezależne, więc z warunku  $\dim(\ker \phi^5 \cap \text{im } \phi^5) = 1$  wynika, że jest dokładnie jedno pole o własności opisanej wyżej. A zatem diagram Younga ma 6 kolumn, w pierwszych 5 kolumnach ma 14 pól, a w ostatniej jedno. W rezultacie mamy<sup>2</sup>  $\dim V = 15$ . To oznacza, że postać Jordana  $\phi$  ma dokładnie jedną klatkę rozmiaru  $6 \times 6$ . Zostaje zatem do rozdzielienia 9 pól diagramu (w kolejnych wierszach). Pięć z nich musi znajdować się w pierwszych dwóch kolumnach, a kolejne cztery należą do trzech kolejnych kolumn. Jedynymi podziałami liczby 9 spełniającym te warunki są  $5 + 3 + 1$  oraz  $4 + 4 + 1$ . A zatem postać Jordana  $\phi$  ma 4 klatki rozmiarów odpowiednio:  $6, 5, 3, 1$ . lub  $6, 4, 4, 1$ . ■

**Zadanie 5c. (5p)** Niech  $V, W$  będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru, zaś niech  $\phi : V \rightarrow W$  oraz  $\psi : W \rightarrow V$  będą przekształceniami liniowymi, przy czym  $(\text{id}_V - \psi \circ \phi) \in \text{End}(V)$  jest nilpotentny. Wskaż warunek konieczny i dostateczny, aby  $(\text{id}_W - \phi \circ \psi) \in \text{End}(W)$  był również nilpotentny.

Odpowiedź:  $\dim V = \dim W$ . Niech  $A = M(\phi)_{st}^{st}$  oraz  $B = M(\psi)_{st}^{st}$ . Wówczas

$$w_{AB-I}(\lambda) = w_{AB}(\lambda - 1) \text{ oraz } w_{BA-I}(\lambda) = w_{BA}(\lambda - 1).$$

Ale mówiliśmy sobie na ćwiczeniach, że wielomiany charakterystyczne  $w_{AB}$  oraz  $w_{BA}$  mogą różnić się tylko krotnością pierwiastka zerowego. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy  $\dim V \neq \dim W$ . To jednak oznaczałoby, że wielomiany  $w_{AB-I}(\lambda)$  oraz  $w_{BA-I}(\lambda)$  różnią się co najwyżej krotnością pierwiastka równego 1. Jednak  $AB - I$  jest macierzą nilpotentną, więc jej wielomian charakterystyczny to  $\lambda^k$ , dla pewnego  $k$ . Zatem wielomian charakterystyczny  $BA - I$  jest identyczny, gdy  $\dim V = \dim W$  oraz jest równy  $\lambda^k(\lambda - 1)^s$ , jeśli  $\dim V \neq \dim W$ . Stąd  $BA - I$  jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\dim V = \dim W$ .

**Zadanie 5d. (5p)** Czy każda niezerowa macierz  $A \in M_3(\mathbb{Q})$  jest kongruentna nad  $\mathbb{Q}$  do macierzy, która ma dokładnie 3 różne wyrazy? Dla wyjaśnienia: macierz  $I \in M_3(\mathbb{Q})$  ma dokładnie 2 różne wyrazy: 0, 1.

Odpowiedź: TAK. Każda niezerowa macierz wymierna rozmiaru 3 jest kongruentna z macierzą postaci  $\text{diag}(a, b, c)$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ , i nie wszystkie z nich są zerami. Jeśli  $a = b = c \neq 0$ , to mamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

<sup>2</sup>Można to też wywnioskować łatwo np. ze wzoru  $\dim \ker(\phi^{10}) = \ker(\phi^5) + \dim(\ker \phi^5 \cap \text{im } \phi^5)$ , omawianego na ćwiczeniach w kontekście ogólnej formuły na wymiar jądra i obrazu złożenia przekształceń liniowych.

co daje żadaną macierz o trzech różnych wyrazach. Jeśli dwie z liczb  $a, b, c$  są równe i różne od trzeciej, to nie ma czego dowodzić, o ile któraś z nich nie jest zerem. Mamy jednak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 2a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli przyjmiemy zaś, że  $a, b, c$  są parami różne, to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a+b & a+b \\ a & a+b & a+b+c \end{bmatrix},$$

**Zadanie 6. (20p)** Macierz  $P \in M_n(\mathbb{C})$  nazwiemy stochastyczną, jeśli wszystkie jej wyrazy są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi oraz gdy suma wyrazów w każdym jej wierszu wynosi 1. Niech  $M_n$  będzie podzbiorem  $\mathbb{C}$  złożonym ze wszystkich wartości własnych macierzy stochastycznych w  $M_n(\mathbb{C})$ . Przez wielokąt wypukły o wierzchołkach  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{C}$  rozumiemy podzbiór  $\mathbb{C}$  złożony ze wszystkich elementów postaci  $a_1 p_1 + \dots + a_r p_r$ , gdzie  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \geq 0$ , dla  $i = 1, \dots, r$ , oraz  $a_1 + \dots + a_r = 1$ .

- (4p) Niech  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  będzie wektorem własnym macierzy stochastycznej  $P$  o wartości własnej  $\lambda$ . Wykaż, że jeśli  $Q \subset \mathbb{C}$  jest wielokątem wypukłym o wierzchołkach we współrzędnych wektora  $z$ , to zachodzi zawieranie  $\lambda \cdot Q = \{\lambda \cdot q \mid q \in Q\} \subseteq Q$ .
- (8p) Pokaż, że  $M_n$  zawiera 1, jest symetryczny względem prostej  $\text{Re}(z)$  oraz, że  $M_n \subset \{z : |z| \leq 1\}$ . Wykaż ponadto, że jeśli  $\lambda \in M_n$  i  $|\lambda| = 1$ , to  $\lambda$  jest pierwiastkiem z 1.
- (8p) Wykaż, że jeśli  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  są zespolonymi wartościami własnymi macierzy  $P$  rozmiaru  $3 \times 3$  o nieujemnych wyrazach rzeczywistych, to  $3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2$ . Wywnioskuj stąd, że zbiór  $M_3 \setminus \mathbb{R}$  jest zawarty w trójkącie równobocznym o wierzchołkach w pierwiastkach stopnia 3 z 1.

Rozwiązanie (a). Niech  $z = (z_1, \dots, z_n)$  będzie wektorem własnym macierzy stochastycznej  $P = (p_{ij})$  o wartości własnej  $\lambda$ , czyli  $Pz = \lambda z$ . Przechodząc w tej równości do współrzędnej  $i = 1, \dots, n$  mamy

$$\lambda z_i = p_{i1} z_1 + p_{i2} z_2 + \dots + p_{in} z_n. \quad (*)$$

Rozważając wielokąt wypukły  $Q$  o wierzchołkach  $z_1, \dots, z_n$  (nie wszystkie one są zerami) oraz dowolny należący doń punkt  $q = q_1 z_1 + \dots + q_n z_n$ , gdzie  $q_i \geq 0$  oraz  $q_1 + \dots + q_n = 1$  mamy, na mocy (\*):

$$\begin{aligned} \lambda q &= \lambda(q_1 z_1 + \dots + q_n z_n) = \\ &= q_1(p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + \dots + p_{1n} z_n) + \dots + q_n(p_{n1} z_1 + p_{n2} z_2 + \dots + p_{nn} z_n) = \\ &= (q_1 p_{11} + q_n p_{n1}) z_1 + \dots + (q_n p_{n1} + \dots + q_n p_{nn}) z_n. \end{aligned}$$

Oczywiście  $q_1 p_{1i} + \dots + q_n p_{ni} \geq 0$ , zaś suma tych współczynników to  $q_1 + \dots + q_n = 1$ . Zatem  $\lambda q \in Q$ .

*Uwaga.* Wykazaliśmy, że jeśli  $\lambda \in M_n$ , to istnieje wielokąt wypukły  $Q$  taki, że  $\lambda Q \subseteq Q$ . Zachodzi też fakt odwrotny. Istotnie, niech  $\lambda Q \subset Q$ , dla pewnego wielokąta wypukłego o wierzchołkach  $z_1, \dots, z_q$ ,  $q \leq n$ . Wtedy  $\lambda z_j$  leży w  $Q$ , a zatem istnieją takie  $p_{ij} \geq 0$  oraz  $p_{i1} + \dots + p_{iq} = 1$ , że  $\lambda z_i = p_{i1} z_1 + \dots + p_{iq} z_q$ . Niech  $P$  będzie macierzą, która w pierwszych  $q$  wierszach i kolumnach ma wyrazy  $p_{ij}$ , a poza nimi zera. Wówczas macierz  $P$  jest stochastyczna i ma wektor własny  $(z_1, \dots, z_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-q})$  o wartości własnej  $\lambda$ .

Rozwiązanie (b). Oczywiście dla dowolnej macierzy stochastycznej rozmiaru  $n$  wektor złożony z samych jedynek jest wektorem własnym o wartości własnej 1. Zbiór  $M_n$  jest sumą mnogościową zbiorów pierwiastków zespolonych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, a zatem z każdym pierwiastkiem nierzeczywistym z takiego wielomianu należącym do  $M_n$ , do zbioru  $M_n$  wchodzi także sprzężony z nim pierwiastek  $\bar{z}$ . Wreszcie, korzystając<sup>3</sup> z (a) bierzemy wielokąt  $Q$  odpowiadający wartości własnej  $\lambda$  i wybieramy z niego takie  $z$ , że  $|z|$  jest maksymalny. Wówczas  $\lambda z \in \lambda Q \subseteq Q$ , zatem  $|\lambda z| \leq |z|$ , czyli  $|\lambda| \leq 1$ .

<sup>3</sup>Mozna także argumentować bez punktu (a) rozważając na  $\mathbb{C}^n$  (nad  $\mathbb{R}$ ) tzw. normę maksimum  $\|\cdot\|_\infty$  zadaną wzorem:  $\|(z_1, \dots, z_n)\| = \max(|z_i|)$ . Wówczas rozważając na  $M_n(\mathbb{C})$  tzw. normę wierszową, tzn.  $\|P\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |p_{ij}|$  oraz pokazując, że  $\|\lambda v\|_\infty = \|Pv\|_\infty \leq \|P\|_\infty \cdot \|v\|_\infty$ , dostajemy  $|\lambda| \leq 1$ . To znana sztuczka z teorii zbiorów wypukłych.

Pozostało wykazanie, że jeśli  $\lambda \in M_n$  oraz  $|\lambda| = 1$ , to  $\lambda$  jest pierwiastkiem z 1. Weźmy znowu wielokąt  $Q$  odpowiadający  $\lambda$  i taki punkt  $0 \neq z \in Q$ , że  $|z|$  jest maksymalny. Jeśli  $z_1, \dots, z_n$  to wierzchołki  $Q$ , to

$$|z| = |a_1 z_1 + \dots + a_n z_n| \leq a_1 |z_1| + \dots + a_n |z_n| \leq (a_1 + \dots + a_n) \max_i |z_i| = \max_i |z_i| \leq |z|.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi tylko gdy wszystkie  $z_i$  są proporcjonalne. A zatem  $z$  jest jednym z wierzchołków. Zatem  $\lambda z, \lambda^2 z, \dots$ , które również należą do  $Q$  (bo  $\lambda Q \subseteq Q$ ), mają również moduł  $|z|$  (bo  $|\lambda| = 1$ ), więc powtarzając powyższy argument – są wierzchołkami  $Q$ . Skoro jednak  $Q$  ma skończenie wiele wierzchołków, to istnieją  $s, t$ , że  $\lambda^{s+t} z = \lambda^s z$ . Skoro  $|\lambda| \neq 0$ , to  $z \neq 0$ , czyli  $\lambda^t = 1$ .

Rozwiązanie (c). Niech  $P = (p_{ij})$  będzie macierzą o wyrazach nieujemnych i wartościach własnych  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Oczywiście  $\text{tr}(P) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ . Macierz  $P^2$  ma wartości własne  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ , a zatem z tego, że  $p_{ij} \geq 0$  oraz z nierówności Schwarz'a  $\|(p_{11}, p_{22}, p_{33})\|^2 \cdot \|(1, 1, 1)\|^2 \geq \langle (p_{11}, p_{22}, p_{33}), (1, 1, 1) \rangle_{st}^2$  mamy:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= \text{tr}(P^2) = \\ &= p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} + p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} + p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} \geq \\ &\geq p_{11}^2 + p_{22}^2 + p_{33}^2 \geq \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})^2 = \frac{1}{3}(\text{tr}(P))^2 = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2. \end{aligned}$$

Teraz pokazujemy tezę dotyczącą zbioru  $M_3$ . Zauważmy, że jeśli macierz  $P$  rozważana wyżej jest stochastyczna, to jej wielomian charakterystyczny ma pierwiastki  $1, \lambda, \bar{\lambda}$ , dla pewnego  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Jak wyżej,  $\text{tr}(P) = \lambda + \bar{\lambda} + 1$ . Skoro  $P$  ma wyrazy nieujemne to jej ślad też jest nieujemny, co oznacza, że dla  $\lambda \in M_3$  mamy  $\text{Re}(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$ . Oczywiście  $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$  to prosta zawierająca jeden z boków rozważanego w tezie trójkąta. Proste zawierające pozostałe boki opisane są równaniami:  $1 - \text{Re}(z) \pm \sqrt{3} \text{Im}(z) = 0$ . Zauważmy, że nierówność wykazana wyżej przybiera dla macierzy  $P$  (o wartościach własnych  $1, \lambda, \bar{\lambda}$ ) postać:

$$3(1 + 2 \text{Re}(\lambda)^2) \geq (1 + 2 \text{Re}(\lambda))^2,$$

czyli

$$(1 - \text{Re}(\lambda))^2 \geq 3 \text{Im}(\lambda)^2.$$

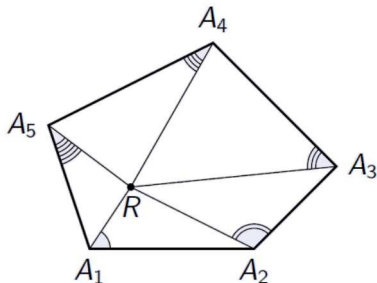
A zatem:

$$(1 - \text{Re}(\lambda) - \sqrt{3} \text{Im}(\lambda))(1 - \text{Re}(\lambda) + \sqrt{3} \text{Im}(\lambda)) \geq 0.$$

Biorąc pod uwagę, że  $M_3$  zawiera się w dysku  $|z| \leq 1$ , dostajemy tezę.

\* \* \*

**KOMENTARZ.** Problem określenia położenia spektrum macierzy stochastycznych postawił w 1938 roku wielki radziecki matematyk Andriej Kołmogorow. W roku akademickim 1944-45 podczas seminarium dotyczącego teorii procesów Markova pytanie Kołmogorowa trafiło do grupy studentów. Niedługo później dwójka dwudziestolatek: K. Dmitriev oraz E. Dynkin znalazła niezwykle pomysł ataku tego problemu. Dmitriev został przyjęty na Uniwersytet w wieku 14 lat i był powszechnie uznawany za geniusza. Dynkin przyszedł na uczelnię jako szesnastolatek i okazał się nie mniej wybitnym. Obydwaj doktoryzowali się u Kołmogorowa. Tej dwójce udało się dokonanie geometrycznego przeformułowania problemu, czego fragment widzieliśmy w zadaniu. Kolejne pomysły to między innymi uogólnienie twierdzenia o kącie Brocarda, ograniczające, dla  $n$ -kąta wypukłego, miarę najmniejszego z kątów zaznaczonych niżej, po wszystkich  $R$  (piękne i proste rozwiązanie w prezentacji niżej; dla  $n = 3$  było to zadanie na IMO 1991):

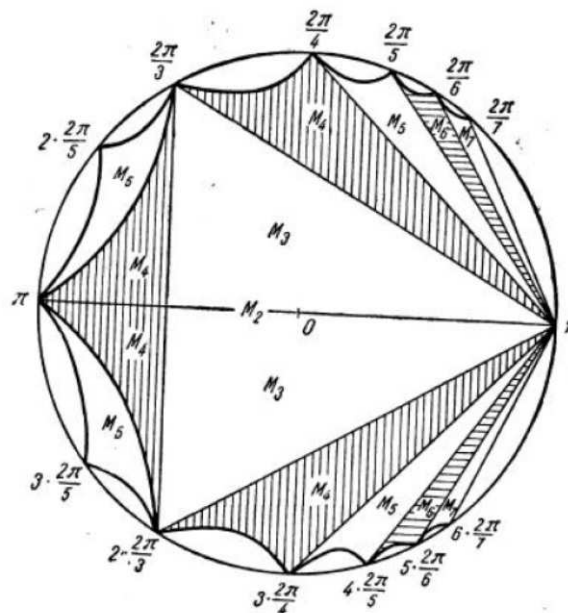


Swoje wyniki publikowali z Kołmogorowem w latach 1945-46. W roku 1951 problem doczekał się całkowitego rozwiązania przez studenta Dynkina: F. Karpielewicza. To właśnie nazwiskiem Dynkina opatrzone są grafy, dla których forma Titsa (komentarz do zadania 3) jest dodatnio określona. Warto zajrzeć do prezentacji poświęconej temu problemowi: <https://abesenyei.web.elte.hu/publications/dynkin.pdf>.



ТЕОРЕМА VII. Для  $n \leq 5$   $M_n$  будет объединением циклических  $k$ -угольников ( $k \leq n$ ).

В заключение приведем чертеж (фиг. 11), схематически изображающий фигуры  $M_2, M_3, M_4, M_5$  и те части фигур  $M_n$  для  $n > 5$ , которые нам известны.



Z oryginalnej pracy Dmitrieva i Dynkina: opis zbiorów  $M_2, M_3, M_4, M_5$ . Jest on do zrozumienia! Źródło: <https://abesenyei.web.elte.hu/publications/dynkin.pdf>.