Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 9, 30.03.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Funkcję: $h : V \times V \to K$ nazywamy **formą dwuliniową** (lub **funkcjonałem dwuliniowym**) na przestrzeni V, jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zachodzi:

(1) liniowość względem pierwszej zmiennej:
$h(a\alpha + b\beta, \gamma) = a \cdot h(\alpha, \gamma) + b \cdot h(\beta, \gamma)$,

(2) liniowość względem drugiej zmiennej:
$h(\alpha, c\gamma + d\delta) = c \cdot h(\alpha, \gamma) + d \cdot h(\alpha, \delta)$.

Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to baza V, to określamy $G(h; \mathcal{A}) = [h(\alpha_i, \alpha_j)] \in M_n(K)$.

Uwaga

Macierze $A, B \in M_n(K)$ są macierzami tej samej formy dwuliniowej na K^n (w pewnych bazach) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(K)$ taka, że $C^T AC = B$, tzn. gdy A i B są **kongruentne** nad K.

Definicja

Niech V – przestrzeń liniowa nad ciałem K, zaś h – forma dwuliniowa na V.

(a) Mówimy, że wektory α, β są **prostopadłe**, jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$.

(b) Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **izotropowym**, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$, to znaczy $\alpha \perp \alpha$.

(c) Mówimy, że przestrzeń (V, h) (odp. forma h lub przestrzeń V) jest:

- **nieosobliwa**, jeśli $G(h, \mathcal{A})$ jest odwracalna, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ w V,
- **osobliwa**, jeśli $G(h, \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, dla pewnej bazy $\mathcal{A}$ w V,
- **całkowicie zdegenerowana** jeśli $h \equiv 0$ na V.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie V to przestrzeń liniowa sk. wymiaru, zaś $h : V \times V \to K$ to forma dwuliniowa symetryczna nazywamy **przestrzenią dwuliniową**.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Np. dla wektora nieizotropowego $\alpha \in V$ mamy $\mathrm{lin}(\alpha) \oplus \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp} = V$ i każdy układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.

Wniosek

Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(K)$, gdzie $\mathrm{char}(K) \neq 2$ istnieje kongruentna do niej macierz diagonalna $D \in M_n(K)$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcję $\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy **iloczynem skalarnym na przestrzeni** V, jeśli $\langle\,,\,\rangle$ jest symetryczną formą dwuliniową na V oraz dla każdego $\alpha \neq 0$ z przestrzeni V mamy:

$$\langle\,\alpha, \alpha\,\rangle > 0.$$

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nad $\mathbb{R}$, gdzie h jest iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią euklidesową** (czyli zakładamy, że $\dim V < \infty$)..

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcję $\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy **iloczynem skalarnym na przestrzeni** V, jeśli $\langle\,,\,\rangle$ jest symetryczną formą dwuliniową na V oraz dla każdego $\alpha \neq 0$ z przestrzeni V mamy:

$$\langle \alpha, \alpha \rangle > 0.$$

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nad $\mathbb{R}$, gdzie h jest iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią euklidesową**.

Przykłady:

- forma dwuliniowa $\langle\,,\,\rangle_{st}$ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ określona wzorem
$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle_{st} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$
zadaje tzw. **standardowy iloczyn skalarny.**

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcję $\langle\, , \,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy **iloczynem skalarnym na przestrzeni** V, jeśli $\langle\, , \,\rangle$ jest symetryczną formą dwuliniową na V oraz dla każdego $\alpha \neq 0$ z przestrzeni V mamy:

$$\langle\, \alpha, \alpha \,\rangle > 0.$$

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nad $\mathbb{R}$, gdzie h jest iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią euklidesową**.

Przykłady:

- funkcja $\langle\, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \,\rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 9x_2 y_2 + 4x_3 y_3$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$. Istotnie
$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_1 + 9x_2^2 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Funkcję $\langle\, , \,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazywamy **iloczynem skalarnym na przestrzeni** V, jeśli $\langle\, , \,\rangle$ jest symetryczną formą dwuliniową na V oraz dla każdego $\alpha \neq 0$ z przestrzeni V mamy:

$$\langle\, \alpha, \alpha \,\rangle > 0.$$

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nad $\mathbb{R}$, gdzie h jest iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią euklidesową**.

Przykłady:

- na podprzestrzeni $l^2 \subset \mathbb{R}^\infty$ złożonej z ciągów spełniających $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, mamy iloczyn skalarny:

$$\langle\, (x_n), (y_n) \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|.$$

Definicja

Niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. **Długością** (albo **normą**) wektora $\alpha \in V$ nazywamy liczbę $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Definicja

Niech $\langle\, , \,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. **Długością** (albo **normą**) wektora $\alpha \in V$ nazywamy liczbę $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\, \alpha, \alpha \,\rangle}$.

Proste własności normy: dla każdych $\alpha, \beta \in (V, \langle\, , \,\rangle)$ oraz $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $||\alpha + \beta||^2 = ||\alpha||^2 + ||\beta||^2 + 2\langle\, \alpha, \beta \,\rangle$,
- $||a\alpha|| = |a| \cdot ||\alpha||$,
- $||\alpha|| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Definicja

Niech $\langle\, , \,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. **Długością** (albo **normą**) wektora $\alpha \in V$ nazywamy liczbę $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\, \alpha, \alpha\,\rangle}$.

Proste własności normy: dla każdych $\alpha, \beta \in (V, \langle\, , \,\rangle)$ oraz $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $||\alpha + \beta||^2 = ||\alpha||^2 + ||\beta||^2 + 2\langle\, \alpha, \beta\,\rangle$,
- $||a\alpha|| = |a| \cdot ||\alpha||$,
- $||\alpha|| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Twierdzenie

Niech $\langle\, , \,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V. Wówczas dla każdych $\alpha, \beta \in V$ zachodzi:

(1)	$|\langle\, \alpha, \beta\,\rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$	– nierówność Schwarza,
(2)	$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$	– nierówność trójkąta,
(3)	jeśli $\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = 0$, to $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2$	– twierdzenie Pitagorasa.

Fakt

Niech $(V, \langle\, , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas w V istnieje baza prostopadła $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, w której macierz $G(\langle\, , \rangle, \mathcal{A})$ jest identycznością. Bazę tą nazywamy **bazą ortonormalną** $(V, \langle\, , \rangle)$.

Co więcej, dla każdej bazy ortogonalnej $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ współrzędne dowolnego wektora $\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n \in V$ w bazie $\mathcal{B}$ wynoszą:

$$a_1 = \frac{\langle \beta, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}, \quad a_2 = \frac{\langle \beta, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}, \quad \ldots \quad , a_n = \frac{\langle \beta, \beta_n \rangle}{\langle \beta_n, \beta_n \rangle}.$$

Oczywiście $G(\langle\, , \rangle, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(\langle \beta_1, \beta_1 \rangle, \ldots, \langle \beta_n, \beta_n \rangle)$.

Fakt

Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wówczas w V istnieje baza prostopadła $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, w której macierz $G(\langle\ ,\ \rangle, \mathcal{A})$ jest identycznością. Bazę tą nazywamy **bazą ortonormalną** $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

Co więcej, dla każdej bazy ortogonalnej $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ współrzędne dowolnego wektora $\beta = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n \in V$ w bazie $\mathcal{B}$ wynoszą:

$$a_1 = \frac{\langle\, \beta, \beta_1 \,\rangle}{\langle\, \beta_1, \beta_1 \,\rangle}, \quad a_2 = \frac{\langle\, \beta, \beta_2 \,\rangle}{\langle\, \beta_2, \beta_2 \,\rangle}, \quad \ldots \quad , a_n = \frac{\langle\, \beta, \beta_n \,\rangle}{\langle\, \beta_n, \beta_n \,\rangle}.$$

Oczywiście $G(\langle\ ,\ \rangle, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(\langle\, \beta_1, \beta_1 \,\rangle, \ldots, \langle\, \beta_n, \beta_n \,\rangle)$.

Uwaga. W przestrzeni nieskończonego wymiaru V z iloczynem skalarnym można wprowadzać pojęcie układu ortogonalnego wektorów (odp. podprzestrzeni) $u_i, i \in I$ (odp. $U_i, i \in I$) takich, że $u_i \perp u_j$, dla każdych $i \neq j$ należących do I (odp. analogiczny warunek). **Ćwiczenie.** Każdy układ ortogonalny w V jest liniowo niezależny, a każdy układ ortogonalny podprzestrzeni jest sumą prostą.

Fakt

Niech V będzie przestrzenią, zaś $\langle \, , \, \rangle$ – iloczynem skalarnym na V. Wówczas dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ ograniczenie formy $\langle \, , \, \rangle$ do $W \times W$ jest iloczynem skalarnym oraz jeśli $W \neq 0$, to forma ta jest nieosobliwa. W szczególności:

- $V = W \oplus W^{\perp}$,
- jeśli $\dim W = k$, to $\dim W^{\perp} = n - k$,
- $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Fakt

Niech V będzie przestrzenią, zaś $\langle \, , \, \rangle$ – iloczynem skalarnym na V. Wówczas dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ ograniczenie formy $\langle \, , \, \rangle$ do $W \times W$ jest iloczynem skalarnym oraz jeśli $W \neq 0$, to forma ta jest nieosobliwa. W szczególności:

- $V = W \oplus W^{\perp}$,
- jeśli $\dim W = k$, to $\dim W^{\perp} = n - k$,
- $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy podprzestrzeń W opisaną układem równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Wówczas $W^{\perp} = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^{\perp}$, gdzie $\alpha_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, dla $i = 1, \ldots, m$.

Przykład. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \,\rangle$ zadanym wzorem:

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4 + x_5y_5$$

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Przykład. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \,\rangle$ zadanym wzorem:

$$\langle\,(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\,\rangle = 2x_1y_1+x_1y_4+x_2y_2+2x_3y_3+x_4y_1+2x_4y_4+x_5y_5$$

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

- Oczywiście $\dim W = 3$. Weźmy dowolny niezerowy $\alpha \in W$ na przykład $(-1,0,1,0,1)$ i wyznaczmy przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.

Przykład. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \,\rangle$ zadanym wzorem:

$$\langle\, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)\,\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4 + x_5y_5$$

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

- Oczywiście $\dim W = 3$. Weźmy dowolny niezerowy $\alpha \in W$ na przykład $(-1, 0, 1, 0, 1)$ i wyznaczmy przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$.
- Wektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ należy do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \qquad (**)$$

Przykład. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \,\rangle$ zadanym wzorem:

$\langle\, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)\,\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4 + x_5y_5$

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

- Oczywiście $\dim W = 3$. Weźmy dowolny niezerowy $\alpha \in W$ na przykład $(-1, 0, 1, 0, 1)$ i wyznaczmy przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$.
- Wektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ należy do $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \qquad (**)$$

- Wektory β, γ, które mają dopełnić α do bazy ortogonalnej W pochodzą z $W' = \mathrm{lin}(\alpha)^\perp \cap W$ opisanej 3 równaniami: $(*)$ oraz $(**)$.

Przykład. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym $\langle \, , \, \rangle$ zadanym wzorem:

$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_4 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_1 + 2x_4y_4 + x_5y_5$

Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

- Oczywiście $\dim W = 3$. Weźmy dowolny niezerowy $\alpha \in W$ na przykład $(-1, 0, 1, 0, 1)$ i wyznaczmy przestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.
- Wektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ należy do $\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \qquad (**)$$

- Wektory β, γ, które mają dopełnić α do bazy ortogonalnej W pochodzą z $W' = \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp} \cap W$ opisanej 3 równaniami: $(*)$ oraz $(**)$.
- Powtarzamy procedurę od początku dla $W = W'$.

Uwaga. Rozważmy podprzestrzeń $X \subseteq \mathbb{R}^\infty$ złożoną z ciągów ograniczonych $(a_1, a_2, \ldots)$ z iloczynem skalarnym $\langle\, , \,\rangle$ danym wzorem:

$$\langle\, (a_n), (b_n)\, \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^2}.$$

Niech U będzie podprzestrzenią X złożoną z ciągów o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Wówczas ciągi $(\epsilon_i)_n$ dane wzorami

$$(\epsilon_i)_n = \begin{cases} n, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases}$$

tworzą bazę ortonormalną U. Jednak $U^\perp = \{0\}$ (sprawdź!) To pokazuje, że układ $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest maksymalnym układem ortogonalnym w X, ale nie jest bazą X.

Uwaga. Rozważmy podprzestrzeń $X \subseteq \mathbb{R}^\infty$ złożoną z ciągów ograniczonych $(a_1, a_2, \ldots)$ z iloczynem skalarnym $\langle \, , \, \rangle$ danym wzorem:

$$\langle\, (a_n), (b_n) \,\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^2}.$$

Niech U będzie podprzestrzenią X złożoną z ciągów o skończonej liczbie niezerowych wyrazów. Wówczas ciągi $(\epsilon_i)_n$ dane wzorami

$$(\epsilon_i)_n = \begin{cases} n, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases}$$

tworzą bazę ortonormalną U. Jednak $U^\perp = \{0\}$ (sprawdź!) To pokazuje, że układ $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest maksymalnym układem ortogonalnym w X, ale nie jest bazą X.

Dostaliśmy przykład **zupełnego układu wektorów** w przestrzeni V nad $\mathbb{R}$, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej, tzn. układu wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ takiego, że dla każdego $\beta \in V$ zachodzi

$$\forall i \in \mathbb{N} \, \langle\, \beta, \alpha_i \,\rangle = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\, ,\, \rangle$ taką, że dla pewnej podprzestrzeni U w V mamy $V = U \oplus U^{\perp}$. Wówczas:

- rzut V na U względem $U^{\perp}$ nazywamy **rzutem prostopadłym** V na U,
- symetrię V względem U wzdłuż $U^{\perp}$ nazywamy **symetrią prostopadłą** V względem U.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$ taką, że dla pewnej podprzestrzeni U w V mamy $V = U \oplus U^{\perp}$. Wówczas:

- rzut V na U względem $U^{\perp}$ nazywamy **rzutem prostopadłym** V na U,
- symetrię V względem U wzdłuż $U^{\perp}$ nazywamy **symetrią prostopadłą** V względem U.

Przykład. W *porządnej* podprzestrzeni funkcji X z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (np. X – funkcje całkowalne na $[-1, 1]$ lub wielomiany – ważny przykład), gdzie

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) = 0$$

przyporządkowanie

$$f \mapsto (f(x) + f(-x))/2$$

jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń funkcji parzystych w X.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$ taką, że dla pewnej podprzestrzeni U w V mamy $V = U \oplus U^{\perp}$. Wówczas:

- rzut V na U względem $U^{\perp}$ nazywamy **rzutem prostopadłym** V na U,
- symetrię V względem U wzdłuż $U^{\perp}$ nazywamy **symetrią prostopadłą** V względem U.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$, zaś $p \in \mathrm{End}(V)$ niech będzie rzutem prostopadłym na U. Wówczas dla każdego $v \in V$

- wektor $p(v)$ jest jedynym elementem U takim, że $\{v - p(v)\} \perp U$,
- jeśli $u \in U$ oraz $u \neq p(v)$, to $||v - p(v)|| < ||v - u||$.

Dowód. Oczywiste (twierdzenie Pitagorasa).

Ćwiczenie

Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie bazą prostopadłą przestrzeni W oraz niech $(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą prostopadłą przestrzeni $W^\perp$. Wówczas dla każdego $\alpha \in V$:

- rzut prostopadły $\phi(\alpha)$ wektora α na W wynosi:

$$\phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i,$$

- symetria prostopadła $\psi(\alpha)$ wektora α względem W wynosi:

$$\psi(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle \alpha, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \alpha_j.$$

W szczególności, $\psi(\alpha) = 2\phi(\alpha) - \alpha$.

Twierdzenie (ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Jeśli $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ jest bazą przestrzeni V, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zadany indukcyjnie wzorami $\alpha_1 = \gamma_1$ oraz dla $j > 1$:

$$\alpha_j = \gamma_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle\, \gamma_j, \alpha_i \,\rangle}{\langle\, \alpha_i, \alpha_i \,\rangle} \alpha_i$$

jest bazą prostopadłą przestrzeni V. Ponadto dla każdego $j = 1, \ldots, n$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_j) \qquad (\dagger).$$

Twierdzenie (ortogonalizacja Grama-Schmidta)

Jeśli $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ jest bazą przestrzeni V, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zadany indukcyjnie wzorami $\alpha_1 = \gamma_1$ oraz dla $j > 1$:

$$\alpha_j = \gamma_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \gamma_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i$$

jest bazą prostopadłą przestrzeni V. Ponadto dla każdego $j = 1, \ldots, n$ mamy:

$$\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_j) \qquad (\dagger).$$

Uwaga. Procedura ortogonalizacji opisana wyżej działa także wtedy, gdy V jest przestrzenią nieskończonego wymiaru, a $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ jest jej skończenie wymiarową podprzestrzenią. Co więcej, biorąc wstępujący łańcuch podprzestrzeni skończonego wymiaru $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \ldots$ można uzyskać, dzięki warunkowi $(\dagger)$, bazę prostopadłą sumy W_i. Sprawdź to dla $V = \mathbb{R}[x]$ i bazy $\{1, x, x^2, \ldots\}$ tej przestrzeni.

Dowód.

- Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego.

Dowód.

- Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego.
- Niech $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego wzory określone w tezie określają bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ przestrzeni W.

Dowód.

- Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego.
- Niech $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego wzory określone w tezie określają bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ przestrzeni W.
- Stąd mamy rozkład wektora γ_n na sumę wektorów z W oraz $W^\perp$, której składnikami są $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W$ oraz $\gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W^\perp$.

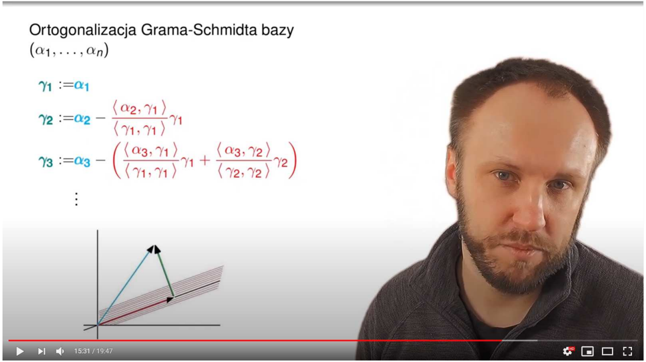
Dowód.

- Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego.
- Niech $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego wzory określone w tezie określają bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ przestrzeni W.
- Stąd mamy rozkład wektora γ_n na sumę wektorów z W oraz $W^\perp$, której składnikami są $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W$ oraz $\gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W^\perp$.
- Drugi z tych wektorów jest niezerowy, bo $\gamma_n \notin \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (tu wykorzystujemy ponownie założenie indukcyjne, tym razem w stosunku do drugiej części tezy).

Dowód.

- Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Przechodzimy do kroku indukcyjnego.
- Niech $W = \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$. Na mocy założenia indukcyjnego wzory określone w tezie określają bazę prostopadłą $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ przestrzeni W.
- Stąd mamy rozkład wektora γ_n na sumę wektorów z W oraz $W^\perp$, której składnikami są $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W \quad \text{oraz} \quad \gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \in W^\perp$.
- Drugi z tych wektorów jest niezerowy, bo $\gamma_n \notin \mathrm{lin}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (tu wykorzystujemy ponownie założenie indukcyjne, tym razem w stosunku do drugiej części tezy).
- A zatem układ: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i$ jest złożony z n niezerowych wektorów prostopadłych. Jest to więc baza prostopadła V. Koniec dowodu.

Filmy, na których opowiadam o różnych (fascynujących) rachunkach w przestrzeniach euklidesowych.



- Bazy ortogonalne — `https://youtu.be/shOCk6nQFGE`
- Różne kątomierze — `https://youtu.be/92xYChexuyU`

Definicja - przypomnienie

Dla macierzy $A \in M_n(K)$ oraz dla $i = 1, \ldots, n$ niech $A^{(i)} \in M_i(K)$ oznacza macierz powstałą z A przez usunięcie ostatnich $n - i$ wierszy i ostatnich $n - i$ kolumn. Wyznacznik macierzy $A^{(i)}$ nazywamy **wiodącym minorem głównym stopnia** i macierzy A.

Kryterium Sylvestera

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie jej bazą. Wówczas h jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi nierówność $\det G(h, \mathcal{A})^{(i)} > 0$.

Definicja - przypomnienie

Dla macierzy $A \in M_n(K)$ oraz dla $i = 1, \ldots, n$ niech $A^{(i)} \in M_i(K)$ oznacza macierz powstałą z A przez usunięcie ostatnich $n - i$ wierszy i ostatnich $n - i$ kolumn. Wyznacznik macierzy $A^{(i)}$ nazywamy **wiodącym minorem głównym stopnia** i macierzy A.

Kryterium Sylvestera

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie jej bazą. Wówczas h jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi nierówność $\det G(h, \mathcal{A})^{(i)} > 0$.

Wniosek

Symetryczna macierz nad $\mathbb{R}$ jest kongruentna z macierzą identycznościową wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiodące minory główne są dodatnie.

Dowód (zakładamy, że h to iloczyn skalarny)

- Niech h będzie iloczynem skalarnym na V oraz niech $\mathcal{A}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ i $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{A}_i)$. Wtedy $h|_{V_i}$ jest iloczynem skalarnym oraz

$$G(h, \mathcal{A})^{(i)} = G(h|_{V_i}, \mathcal{A}_i).$$

Wystarczy zatem pokazać, że $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$.

Dowód (zakładamy, że h to iloczyn skalarny)

- Niech h będzie iloczynem skalarnym na V oraz niech $\mathcal{A}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ i $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{A}_i)$. Wtedy $h|_{V_i}$ jest iloczynem skalarnym oraz
$$G(h, \mathcal{A})^{(i)} = G(h|_{V_i}, \mathcal{A}_i).$$
Wystarczy zatem pokazać, że $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$.
- Niech $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będzie bazą ortonormalną V powstałą z $\mathcal{A}$ poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta oraz niech $\mathcal{B}_i = (\beta_1, \ldots, \beta_i)$.

Dowód (zakładamy, że h to iloczyn skalarny)

- Niech h będzie iloczynem skalarnym na V oraz niech $\mathcal{A}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ i $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{A}_i)$. Wtedy $h|_{V_i}$ jest iloczynem skalarnym oraz

$$G(h, \mathcal{A})^{(i)} = G(h|_{V_i}, \mathcal{A}_i).$$

  Wystarczy zatem pokazać, że $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$.

- Niech $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będzie bazą ortonormalną V powstałą z $\mathcal{A}$ poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta oraz niech $\mathcal{B}_i = (\beta_1, \ldots, \beta_i)$.

- Zgodnie z algorytmem ortogonalizacji mamy $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{B}_i)$ oraz oczywiście $G(h|_{V_i}, \mathcal{B}_i) = I$.

Dowód (zakładamy, że h to iloczyn skalarny)

- Niech h będzie iloczynem skalarnym na V oraz niech $\mathcal{A}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ i $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{A}_i)$. Wtedy $h|_{V_i}$ jest iloczynem skalarnym oraz
$$G(h, \mathcal{A})^{(i)} = G(h|_{V_i}, \mathcal{A}_i).$$
Wystarczy zatem pokazać, że $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$.

- Niech $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ będzie bazą ortonormalną V powstałą z $\mathcal{A}$ poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta oraz niech $\mathcal{B}_i = (\beta_1, \ldots, \beta_i)$.

- Zgodnie z algorytmem ortogonalizacji mamy $V_i = \mathrm{lin}(\mathcal{B}_i)$ oraz oczywiście $G(h|_{V_i}, \mathcal{B}_i) = I$.

- Istnieją zatem macierze odwracalne $C_i \in M_i(\mathbb{R})$ takie, że:
$$G(h, \mathcal{A})^{(i)} = G(h|_{V_i}, \mathcal{A}_i) = (C_i)^T \cdot I \cdot C_i,$$
co oznacza, że $\det G(h, \mathcal{A})^{(i)} = \det(C_i)^2 > 0$.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- Dowodzimy, że h to iloczyn skalarny przez indukcję po $n = \dim V$.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- Dowodzimy, że h to iloczyn skalarny przez indukcję po $n = \dim V$.
- $n = 1$ – jasne. Krok indukcyjny. Rozważmy postać blokową macierzy formy h:

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} G(h, \mathcal{A})^{(n-1)} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}.$$

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- Dowodzimy, że h to iloczyn skalarny przez indukcję po $n = \dim V$.
- $n = 1$ – jasne. Krok indukcyjny. Rozważmy postać blokową macierzy formy h:

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} G(h, \mathcal{A})^{(n-1)} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}.$$

- Główne minory wiodące $G(h, \mathcal{A})^{(n-1)}$ są głównymi minorami wiodącymi $G(h, \mathcal{A})$. Zatem z założenia indukcyjnego $h|_{V_{n-1}}$ jest iloczynem skalarnym.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- Dowodzimy, że h to iloczyn skalarny przez indukcję po $n = \dim V$.
- $n = 1$ – jasne. Krok indukcyjny. Rozważmy postać blokową macierzy formy h:

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} G(h, \mathcal{A})^{(n-1)} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}.$$

- Główne minory wiodące $G(h, \mathcal{A})^{(n-1)}$ są głównymi minorami wiodącymi $G(h, \mathcal{A})$. Zatem z założenia indukcyjnego $h|_{V_{n-1}}$ jest iloczynem skalarnym.
- Jeśli $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots \beta_{n-1})$ jest dowolną bazą V_{n-1}, to w bazie $\mathcal{A}' = (\beta_1, \ldots \beta_{n-1}, \alpha_n)$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A}')$ ma postać:

$$G(h, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} G(h|_{V_{n-1}}, \mathcal{B}) & \gamma \\ \gamma^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$$

  i skoro $G(h, \mathcal{A}') = C^T G(h, \mathcal{A}')C$, dla pewnej macierzy odwracalnej C, to wobec założenia $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$ (to jeden z minorów) mamy $\det G(h, \mathcal{A}') > 0$.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- Dowodzimy, że h to iloczyn skalarny przez indukcję po $n = \dim V$.
- $n = 1$ – jasne. Krok indukcyjny. Rozważmy postać blokową macierzy formy h:

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} G(h, \mathcal{A})^{(n-1)} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}^{n-1}, b \in \mathbb{R}.$$

- Główne minory wiodące $G(h, \mathcal{A})^{(n-1)}$ są głównymi minorami wiodącymi $G(h, \mathcal{A})$. Zatem z założenia indukcyjnego $h|_{V_{n-1}}$ jest iloczynem skalarnym.
- Jeśli $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots \beta_{n-1})$ jest dowolną bazą V_{n-1}, to w bazie $\mathcal{A}' = (\beta_1, \ldots \beta_{n-1}, \alpha_n)$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A}')$ ma postać:

$$G(h, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} G(h|_{V_{n-1}}, \mathcal{B}) & \gamma \\ \gamma^T & b \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$$

  i skoro $G(h, \mathcal{A}') = C^T G(h, \mathcal{A}')C$, dla pewnej macierzy odwracalnej C, to wobec założenia $\det G(h, \mathcal{A}) > 0$ (to jeden z minorów) mamy $\det G(h, \mathcal{A}') > 0$.
- Możemy więc dalej zakładać, że $\mathcal{B}$ jest ortonormalna.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- A zatem macierz formy h w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_n)$ ma postać

$$G(h, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & b \end{bmatrix}.$$

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- A zatem macierz formy h w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_n)$ ma postać
$$G(h, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & b \end{bmatrix}.$$
- Niech P^T będzie macierzą powstałą przez zamianą ostatniego wiersza w macierzy $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ na wiersz $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$.

Dowód (zakładamy, że wiodące minory główne > 0)

- A zatem macierz formy h w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \alpha_n)$ ma postać

$$G(h, \mathcal{A}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & b \end{bmatrix}.$$

- Niech P^T będzie macierzą powstałą przez zamianą ostatniego wiersza w macierzy $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ na wiersz $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$.
- Łatwo sprawdzić (patrząc jakie operacje elementarne związane są z mnożeniem przez P oraz P^T), że $P^T G(h, \mathcal{A}')P = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Skoro zaś uzyskana macierz jest to kolejna macierz formy h, to musi mieć dodatni wyznacznik. Zatem $d > 0$ i h jest w sposób oczywisty iloczynem skalarnym.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle\, \alpha_i, \alpha_j \,\rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie

Dla każdego układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ mamy nierówność $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$. Co więcej następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie

Dla każdego układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ mamy nierówność $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$. Co więcej następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$.

Intuicja. Pierwiastek z wyznacznika Grama układu wektorów to objętość równoległościanu rozpiętego przez te wektory.

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama). Pokażemy następującą uwagę.

Uwaga

Dla układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ oraz dla bazy ortonormalnej $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tej przestrzeni niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times k$ mającą w j-tej kolumnie współrzędne wektora α_j w bazie $\beta_1, \ldots, \beta_n$, to znaczy: $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} = \langle \alpha_j, \beta_i \rangle$, dla $1 = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A^T A.$$

W szczególności dla $k = n$ mamy $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\det A)^2$.

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama). Pokażemy następującą uwagę.

Uwaga

Dla układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$ oraz dla bazy ortonormalnej $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tej przestrzeni niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times k$ mającą w j-tej kolumnie współrzędne wektora α_j w bazie $\beta_1, \ldots, \beta_n$, to znaczy: $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} = \langle \alpha_j, \beta_i \rangle$, dla $1 = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A^T A.$$

W szczególności dla $k = n$ mamy $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\det A)^2$.

Przykład. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy układ wektorów $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2)$. Wówczas $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$, $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 3$, $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 6$. Stąd:

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama).

- Należy pokazać, że $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ równy jest:

$$\begin{bmatrix}\langle \alpha_i, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_i, \beta_n \rangle\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\langle \alpha_j, \beta_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_j, \beta_n \rangle\end{bmatrix} = [\langle \alpha_i, \beta_1 \rangle\langle \alpha_j, \beta_1 \rangle + \ldots + \langle \alpha_i, \beta_n \rangle\langle \alpha_j, \beta_n \rangle] =$$

$$= [a_{i1} a_{j1} + \ldots + a_{in} a_{jn}].$$

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama).

- Należy pokazać, że $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ równy jest:

$$\begin{bmatrix} \langle \alpha_i, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_i, \beta_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle \alpha_j, \beta_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_j, \beta_n \rangle \end{bmatrix} = [\langle \alpha_i, \beta_1 \rangle \langle \alpha_j, \beta_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_i, \beta_n \rangle \langle \alpha_j, \beta_n \rangle] =$$

$$= [a_{i1} a_{j1} + \dots + a_{in} a_{jn}].$$

- Ale skoro $\alpha_i = a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n$, bo $a_{ij} = \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$, to $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ równy jest:

$$\langle a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n, a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n \rangle =$$

$$= a_{i1}\langle \beta_1, a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n \rangle \qquad + \dots + a_{in}\langle \beta_n, a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n \rangle =$$

$$= a_{i1} a_{ji} \langle \beta_1, \beta_1 \rangle + \dots + a_{i1} a_{jn} \langle \beta_1, \beta_n \rangle + \dots + a_{in} a_{jn} \langle \beta_1, \beta_n \rangle + \dots + a_{in} a_{jn} \langle \beta_n, \beta_n \rangle.$$

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama).

- Należy pokazać, że $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ równy jest:

$$\begin{bmatrix}\langle \alpha_i, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_i, \beta_n \rangle\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\langle \alpha_j, \beta_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_j, \beta_n \rangle\end{bmatrix} = [\langle \alpha_i, \beta_1 \rangle\langle \alpha_j, \beta_1 \rangle + \ldots + \langle \alpha_i, \beta_n \rangle\langle \alpha_j, \beta_n \rangle] =$$
$$= [a_{i1}a_{j1} + \ldots + a_{in}a_{jn}].$$

- Ale skoro $\alpha_i = a_{i1}\beta_1 + \ldots + a_{in}\beta_n$, bo $a_{ij} = \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$, to $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ równy jest:

$$\langle a_{i1}\beta_1 + \ldots + a_{in}\beta_n, a_{j1}\beta_1 + \ldots + a_{jn}\beta_n \rangle =$$
$$= a_{i1}\langle \beta_1, a_{j1}\beta_1 + \ldots + a_{jn}\beta_n \rangle \qquad + \ldots + a_{in}\langle \beta_n, a_{j1}\beta_1 + \ldots + a_{jn}\beta_n \rangle =$$
$$= a_{i1}a_{ji}\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + \ldots + a_{i1}a_{jn}\langle \beta_1, \beta_n \rangle + \ldots + a_{in}a_{jn}\langle \beta_1, \beta_n \rangle + \ldots + a_{in}a_{jn}\langle \beta_n, \beta_n \rangle.$$

- Skoro baza $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest ortonormalna to $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$. A zatem ostatnie wyrażenie wynosi dokładnie $a_{i1}a_{j1} + \ldots + a_{in}a_{jn}$. To dowodzi, że $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A^T A$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$.
- Jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jest liniowo zależny, to kolumny A są liniowo zależne (one zawierają współrzędne α_j w bazie $\mathcal{B}$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.
- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo zależny, to kolumny A są liniowo zależne (one zawierają współrzędne α_j w bazie $\mathcal{B}$.
- Kolumny $A^T A$ to kombinacje liniowe kolumn macierzy A, więc i one są liniowo zależne. Zatem $\det(A^T A) = 0$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.
- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo zależny, to kolumny A są liniowo zależne (one zawierają współrzędne α_j w bazie $\mathcal{B}$.
- Kolumny $A^T A$ to kombinacje liniowe kolumn macierzy A, więc i one są liniowo zależne. Zatem $\det(A^T A) = 0$.

Ćwiczenie. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \,\rangle)$ i niech γ będzie rzutem prostopadłym α_k na $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^{\perp}$. Wówczas:
$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot ||\gamma||^2.$$
„Objętość równoległościanu” to „objętość podstawy” razy „wysokość".

Przykład zastosowania macierzy $A^T A$ (z 33 Miniatur...)

- *Miasteczko Nieparzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym. każdy klub ma nieparzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Pokazać, że $m \leq n$.*

Przykład zastosowania macierzy $A^T A$ (z 33 Miniatur...)

- *Miasteczko Nieparzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym. każdy klub ma nieparzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Pokazać, że* $m \leq n$.
- Ponumerujmy mieszkańców liczbami $1, 2, \ldots, n$, a kluby nazwijmy $C_1, \ldots, C_m$. Definiujemy macierz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, w której kolumnach stoją „listy przynależności” do klubów. Dokładniej $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ należy do } C_j \\ 0, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ nie należy do } C_j. \end{cases}$$

Przykład zastosowania macierzy $A^T A$ (z 33 Miniatur...)

- *Miasteczko Nieparzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym. każdy klub ma nieparzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Pokazać, że* $m \leq n$.
- Ponumerujmy mieszkańców liczbami $1, 2, \ldots, n$, a kluby nazwijmy $C_1, \ldots, C_m$. Definiujemy macierz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, w której kolumnach stoją „listy przynależności" do klubów. Dokładniej $A = (a_{ij})$:
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ należy do } C_j \\ 0, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ nie należy do } C_j. \end{cases}$$
- Wyraz macierzy $A^T A$ stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie to $|C_i \cap C_j|$! Ćwiczenie: pokazać, że $r(A^T A) = m$ i wywnioskować stąd, że $m \leq n$.

Przykład zastosowania macierzy $A^T A$ (z 33 Miniatur...)

- *Miasteczko Nieparzystów liczy sobie n mieszkańców. W mieście tym jest m klubów, przy czym. każdy klub ma nieparzystą liczbę członków i każde dwa kluby muszą mieć parzystą liczbę wspólnych członków. Pokazać, że $m \leq n$.*

- Ponumerujmy mieszkańców liczbami $1, 2, \ldots, n$, a kluby nazwijmy $C_1, \ldots, C_m$. Definiujemy macierz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, w której kolumnach stoją „listy przynależności" do klubów. Dokładniej $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ należy do } C_j \\ 0, & \text{jeśli mieszkaniec } i \text{ nie należy do } C_j. \end{cases}$$

- Wyraz macierzy $A^T A$ stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie to $|C_i \cap C_j|$! Ćwiczenie: pokazać, że $r(A^T A) = m$ i wywnioskować stąd, że $m \leq n$.

- Rozkład $A^T A$ ma wiele przydatnych zastosowań. Jego uogólnienia to jeden z centralnych tematów naszych dalszych rozważań.