Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 8, 25.03.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Funkcję:

$$h : V \times V \to K$$

nazywamy **formą dwuliniową** (lub **funkcjonałem dwuliniowym**) na przestrzeni V, jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in K$ zachodzi:

(1) liniowość względem pierwszej zmiennej:
$h(a\alpha + b\beta, \gamma) = a \cdot h(\alpha, \gamma) + b \cdot h(\beta, \gamma)$,

(2) liniowość względem drugiej zmiennej:
$h(\alpha, c\gamma + d\delta) = c \cdot h(\alpha, \gamma) + d \cdot h(\alpha, \delta)$.

Zbiór wszystkich form dwuliniowych na V oznaczamy $\mathrm{Bil}(V)$.

Jeśli h jest formą dwuliniową na V oraz $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią, to formę $h' : W \times W \to K$ określoną dla każdych $u, w \in W$ wzorem $h'(u, w) = h(u, w)$ nazywamy **ograniczeniem formy** h do W i oznaczamy $h|_W$.

Przykłady form dwuliniowych na różnych przestrzeniach liniowych:

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja dana $h : V \times V \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3,$$

Przykłady form dwuliniowych na różnych przestrzeniach liniowych:

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja dana $h : V \times V \to \mathbb{R}$ wzorem:
$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3,$$
- Dla dowolnej pary wektorów $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$ określamy:
$$h((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Przykłady form dwuliniowych na różnych przestrzeniach liniowych:

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja dana $h : V \times V \to \mathbb{R}$ wzorem:
$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3,$$
- Dla dowolnej pary wektorów $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$ określamy:
$$h((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$
- Dla $V = M_n(K)$ oraz dowolnych $A, B \in V$ określamy:
$$h((A, B)) = \mathrm{tr}(AB^T).$$

Przykłady form dwuliniowych na różnych przestrzeniach liniowych:

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja dana $h : V \times V \to \mathbb{R}$ wzorem:
$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3,$$
- Dla dowolnej pary wektorów $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$ określamy:
$$h((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$
- Dla $V = M_n(K)$ oraz dowolnych $A, B \in V$ określamy:
$$h((A, B)) = \mathrm{tr}(AB^T).$$
- Dla $V = F_c[0, 1]$ - funkcji *całkowalnych* z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$, określamy:
$$h(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Przykłady form dwuliniowych na różnych przestrzeniach liniowych:

- Dla $V = \mathbb{R}^3$ funkcja dana $h : V \times V \to \mathbb{R}$ wzorem:
$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3,$$
- Dla dowolnej pary wektorów $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$ określamy:
$$h((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$
- Dla $V = M_n(K)$ oraz dowolnych $A, B \in V$ określamy:
$$h((A, B)) = \mathrm{tr}(AB^T).$$
- Dla $V = F_c[0, 1]$ - funkcji *całkowalnych* z $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$, określamy:
$$h(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
- Dla przestrzeni $V = (P(X), \triangle, \emptyset)$ nad $\mathbb{Z}_2$ oraz $A, B \in V$ określamy:
$$h(A, B) = |A \cap B| \pmod 2.$$

Kilka ogólnych idei

- Wzbogacenie przestrzeni liniowej w formę dwuliniową pozwala, intuicyjnie mówiąc, na zadawanie na niej *różnych geometrii* i na badanie nowych typów zależności pomiędzy podzbiorami tej przestrzeni, spośród których wyróżnia się oczywiście ortogonalność (tzn. $h(X, Y) = 0$). Badanie rozmaitych typów endomorfizmów tak wzbogaconych strukturalnie przestrzeni, niezmienniczych na określonych na nich formach dwuliniowych, prowadzi do nowych wyników strukturalnych, m.in. opisujących izometrie przestrzeni euklidesowej.

Kilka ogólnych idei

- Wzbogacenie przestrzeni liniowej w formę dwuliniową pozwala, intuicyjnie mówiąc, na zadawanie na niej *różnych geometrii* i na badanie nowych typów zależności pomiędzy podzbiorami tej przestrzeni, spośród których wyróżnia się oczywiście ortogonalność (tzn. $h(X, Y) = 0$). Badanie rozmaitych typów endomorfizmów tak wzbogaconych strukturalnie przestrzeni, niezmienniczych na określonych na nich formach dwuliniowych, prowadzi do nowych wyników strukturalnych, m.in. opisujących izometrie przestrzeni euklidesowej.
- Formy dwuliniowe wywodzą się z badania problemów znacznie starszych niż sama algebra liniowa, m.in. z teorioliczbowych problemów rozkładu liczb całkowitych na sumy (pewnej liczby) kwadratów, geometrycznych problemów klasyfikacji powierzchni opisanych wielomianowymi równaniami stopnia 2 czy analitycznych problemów szukania ekstremów funkcji wielu zmiennych.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru oraz niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Wówczas wszystkie formy dwuliniowe na V opisane są wzorami:

$$h((x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n), (y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n)) = \sum_{i,j}^{n} x_i y_j h(\alpha_i, \alpha_j).$$

Innymi słowy, jeśli $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, gdzie $a_{ij} = h(\alpha_i, \alpha_j)$, to dla każdych wektorów $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ przestrzeni V zachodzi:

$$h(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową na przestrzeni V i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. **Macierzą formy h w bazie $\mathcal{A}$** nazywamy macierz: $G(h; \mathcal{A}) = [h(\alpha_i, \alpha_j)] \in M_{n \times n}(K)$.

Definicja

Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową na przestrzeni V i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. **Macierzą formy h w bazie $\mathcal{A}$** nazywamy macierz: $G(h; \mathcal{A}) = [h(\alpha_i, \alpha_j)] \in M_{n \times n}(K)$.

Przykłady;

- Jeśli $V = \mathbb{R}^3$ oraz $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, to
$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
- Jeśli $V = (\mathbb{Z}_7)^2$, $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 5x_2 y_2$, oraz $\mathcal{A} = ((1, 1), (0, 4))$, to
$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazami przestrzeni V. Niech $A = G(h; \mathcal{A})$, $B = G(h; \mathcal{B})$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Wówczas

$$B = C^T AC.$$

Uwaga

Niech $h: V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazami przestrzeni V. Niech $A = G(h; \mathcal{A}), B = G(h; \mathcal{B})$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Wówczas

$$B = C^T AC.$$

Dowód.

- Niech $C = [c_{ij}]$. Wyraz z i-tego wiersza i j-tej kolumny $C^T AC$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} c_{1i} & \ldots & c_{ni} \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – bazami przestrzeni V. Niech $A = G(h; \mathcal{A}), B = G(h; \mathcal{B})$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Wówczas

$$B = C^T AC.$$

Dowód.

- Niech $C = [c_{ij}]$. Wyraz z i-tego wiersza i j-tej kolumny $C^T AC$ ma postać:

$$\begin{bmatrix} c_{1i} & \dots & c_{ni} \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}.$$

- Mnożymy więc w rezultacie współrzędne i-tego oraz j-tego elementu bazy $\mathcal{B}$ zapisanych w bazie $\mathcal{A}$ przez macierz formy h w bazie $\mathcal{A}$. A zatem zgodnie z poprzednią uwagą wyraz ten wynosi $h(\beta_i, \beta_j)$.

Uwaga

Niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – bazami przestrzeni V. Niech $A = G(h; \mathcal{A}), B = G(h; \mathcal{B})$ oraz $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$. Wówczas
$$B = C^T AC.$$

Dowód.

- Niech $C = [c_{ij}]$. Wyraz z i-tego wiersza i j-tej kolumny $C^T AC$ ma postać:
$$\begin{bmatrix} c_{1i} & \ldots & c_{ni} \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}.$$
- Mnożymy więc w rezultacie współrzędne i-tego oraz j-tego elementu bazy $\mathcal{B}$ zapisanych w bazie $\mathcal{A}$ przez macierz formy h w bazie $\mathcal{A}$. A zatem zgodnie z poprzednią uwagą wyraz ten wynosi $h(\beta_i, \beta_j)$.
- Ale wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy $B = G(h; \mathcal{B})$ to $h(\beta_i, \beta_j)$.

Definicja

Mówimy, że macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są **kongruentne nad** K jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(K)$ taka, że

$$B = C^T AC.$$

Definicja

Mówimy, że macierze $A, B \in M_{n \times n}(K)$ są **kongruentne nad** K jeśli istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n \times n}(K)$ taka, że

$$B = C^T AC.$$

Kilka uwag.

- kongruencja jest relacją równoważności,
- stwierdzanie kiedy macierze są kongruentne jest trudne,
- w naszych rozważaniach ograniczymy się do sytuacji, gdy h jest symetryczna.

Ćwiczenie

Jeśli macierze $A, B \in M_{n \times n}(K)$ są kongruentne, to:

- $r(A) = r(B)$,
- istnieje niezerowa $\lambda \in K$ taka, że $\det A = \lambda^2 \det B$,
- A jest odwracalna $\Leftrightarrow$ B jest odwracalna.

Uwaga

Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tej samej formy dwuliniowej (jedna w jednej bazie, druga w drugiej).

Uwaga

Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tej samej formy dwuliniowej (jedna w jednej bazie, druga w drugiej).

Dowód.

- Jedną implikację już pokazaliśmy. Niech $B = C^T AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_{n\times n}(K)$. Niech $A = [a_{ij}]$.

Uwaga

Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tej samej formy dwuliniowej (jedna w jednej bazie, druga w drugiej).

Dowód.

- Jedną implikację już pokazaliśmy. Niech $B = C^T AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_{n\times n}(K)$. Niech $A = [a_{ij}]$.
- Określmy formę dwuliniową $h : K^n \times K^n \to K$ warunkiem $G(h; st) = A$. To znaczy:

$$h((x_1, \dots , x_n), (y_1, \dots , y_n)) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

Uwaga

Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są kongruentne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami tej samej formy dwuliniowej (jedna w jednej bazie, druga w drugiej).

Dowód.

- Jedną implikację już pokazaliśmy. Niech $B = C^T AC$, dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_{n\times n}(K)$. Niech $A = [a_{ij}]$.
- Określmy formę dwuliniową $h : K^n \times K^n \to K$ warunkiem $G(h; st) = A$. To znaczy:
$$h((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$
- Niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ będzie bazą przestrzeni K^n zadaną przez $M(id)^{st}_{\mathcal{B}} = C$. Wówczas z dowodu poprzedniej uwagi wynika natychmiast, że $B = G(h; \mathcal{B})$.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie $\dim V < \infty$, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy **przestrzenią dwuliniową.**

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie $\dim V < \infty$, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy **przestrzenią dwuliniową.**

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **antysymetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = -h(\beta, \alpha)$.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie $\dim V < \infty$, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy **przestrzenią dwuliniową**.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **antysymetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = -h(\beta, \alpha)$.

Definiuje się też pojęcie przestrzeni dwuliniowej bez założenia o symetryczności. Rozważa się wtedy rozmaite dodatkowe warunki dotyczące form: np.

- **refleksywność** formy dwuliniowej h, gdy $h(\alpha, \beta) = 0$ implikuje $h(\beta, \alpha) = 0$,
- **alternowanie** formy dwuliniowej h, gdy $h(\alpha, \alpha) = 0$, dla każdego $\alpha \in V$.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie $\dim V < \infty$, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy **przestrzenią dwuliniową.**

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **antysymetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = -h(\beta, \alpha)$.

$\mathrm{Bil}(V)$ jest przestrzenią liniową izomorficzną z $\mathrm{End}(V)$ (formy (anty)symetryczne stanowią jej podprzestrzeń). Jeśli $\mathrm{char}(K) \neq 2$ to mamy jednoznaczny rozkład:

$$h(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2}(h(x, y) + h(y, x))}_{\text{forma symetryczna}} + \underbrace{\frac{1}{2}(h(x, y) - h(y, x))}_{\text{forma antysymetryczna}}.$$

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy **symetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\beta, \alpha)$.

Parę (V, h), gdzie $\dim V < \infty$, zaś $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną nazywamy **przestrzenią dwuliniową**.

Definicja

Formę dwuliniową h na przestrzeni liniowej V nazywamy **antysymetryczną**, jeśli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = -h(\beta, \alpha)$.

Jeśl $\dim V < \infty$ i (V, h) jest formą dwuliniową (anty)symetryczną, to macierz tej formy jest w każdej bazie (anty)symetryczna. Innymi słowy, każda macierz (anty)symetryczna kongruentna do macierzy formy h jest macierzą tej formy.

Definicja

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową.

(a) Mówimy, że wektory α, β są **prostopadłe**, jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$. Jeśli X, Y są podzbiorami V i $\alpha \perp \beta$, dla każdych $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, to piszemy $X \perp Y$.

(b) $X^{\perp}$ – zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich elementów $X \subseteq V$.

(c) Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **izotropowym**, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$, to znaczy $\alpha \perp \alpha$.

Definicja

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową.

(a) Mówimy, że wektory α, β są **prostopadłe**, jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$. Jeśli X, Y są podzbiorami V i $\alpha \perp \beta$, dla każdych $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, to piszemy $X \perp Y$.

(b) $X^{\perp}$ – zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich elementów $X \subseteq V$.

(c) Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **izotropowym**, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$, to znaczy $\alpha \perp \alpha$.

- Jeśli w przestrzeni dwuliniowej V istnieje baza $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ taka, ze $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, dla $i \neq j$, to macierz tej formy jest diagonalna.

Definicja

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową.

(a) Mówimy, że wektory α, β są **prostopadłe**, jeśli $h(\alpha, \beta) = 0$, ozn. $\alpha \perp \beta$. Jeśli X, Y są podzbiorami V i $\alpha \perp \beta$, dla każdych $\alpha \in X$, $\beta \in Y$, to piszemy $X \perp Y$.

(b) $X^\perp$ – zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich elementów $X \subseteq V$.

(c) Wektor $\alpha \in V$ nazywamy **izotropowym**, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$, to znaczy $\alpha \perp \alpha$.

- Jeśli w przestrzeni dwuliniowej V istnieje baza $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ taka, ze $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, dla $i \neq j$, to macierz tej formy jest diagonalna.
- Dla formy h na $\mathbb{R}^2$ zadanej wzorem $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ wektory $(1, 0), (0, 1)$ są izotropowe oraz

$$\operatorname{lin}(1, 0)^\perp = \operatorname{lin}(1, 0), \quad \operatorname{lin}(0, 1)^\perp = \operatorname{lin}(0, 1).$$

Z drugiej strony mamy:

$$\mathbb{R}^2 = \operatorname{lin}(1, 1) \oplus \operatorname{lin}(1, 1)^\perp = \operatorname{lin}(1, 1) \oplus \operatorname{lin}(1, -1) = \operatorname{lin}(1, -1)^\perp \oplus \operatorname{lin}(1, -1).$$

Definicja

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V nazywamy **prostopadłym** (albo **ortogonalnym**), jeśli $\alpha_i \perp \alpha_j$ (czyli $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$), dla każdych $i \neq j$. Bazę przestrzeni V nazywamy **prostopadłą** (albo **ortogonalną**), jeśli jest ona układem prostopadłym.

Przykłady.

- Dla przestrzeni $(\mathbb{R}^2, h)$, gdzie h zadana jest wzorem
$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$
układ $((1, 1), (1, -1))$ jest bazą prostopadłą.

Definicja

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni V nazywamy **prostopadłym** (albo **ortogonalnym**), jeśli $\alpha_i \perp \alpha_j$ (czyli $h(\alpha_i, \alpha_j) = 0$), dla każdych $i \neq j$. Bazę przestrzeni V nazywamy **prostopadłą** (albo **ortogonalną**), jeśli jest ona układem prostopadłym.

Przykłady.

- W przestrzeni $((\mathbb{Z}_2)^2, h)$, gdzie h zadana jest wzorem

  $$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

  nie ma bazy prostopadłej. Istotnie, gdyby $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$ było taką bazą, to $h(\alpha_1, \alpha_2) = h(\alpha_2, \alpha_1) = 0$. Ale każdy wektor w $((\mathbb{Z}_2)^2, h)$ jest izotropowy, co oznacza, że macierz $G = G(h; \mathcal{A})$ byłaby zerowa, czyli h byłoby formą zerową. To niemożliwe, bo

  $$h((1, 0), (0, 1)) = 1 \neq 0.$$

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Plan dowodu.

- układ ortogonalny złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny,
- jeśli W jest podprzestrzenią (V, h) taką, że macierz to następujące warunki są równoważne:
  - macierz formy $h|_W$ jest odwracalna,
  - $V = W \oplus W^{\perp}$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Plan dowodu.

- układ ortogonalny złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny,
- jeśli W jest podprzestrzenią (V, h) taką, że macierz to następujące warunki są równoważne:
  - macierz formy $h|_W$ jest odwracalna,
  - $V = W \oplus W^{\perp}$.

Wniosek

Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(K)$, gdzie $\mathrm{char}(K) \neq 2$ istnieje kongruentna do niej macierz diagonalna $D \in M_n(K)$.

Kilka uwag zanim przejdziemy do dowodu.

- Relacja kongruencji macierzy jest relacją równoważności na zbiorze macierzy symetrycznych, a także na zbiorze macierzy antysymetrycznych. Problem badania kongruencji w zbiorze macierzy niesymetrycznych jest bardzo trudny, choć można znaleźć sporo wyników cząstkowych, w tym współczesnych[1].

  Jedną z możliwych prób badania klas kongruencji macierzy niesymetrycznej A nad ciałem charakterystyki różnej od 2 jest badanie rozkładu:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{A^{sym}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{A^{antysym}}$$

  i próba znalezienia wspólnej macierzy odwracalnej $P \in M_n(K)$ takiej, że macierze $P^T A^{sym} P, \quad P^T A^{antysym} P$ będą diagonalne. To jest zwykle trudne.

1. Na przykład dowód tego, że macierze A i A^T są kongruentne nad dowolnym ciałem pochodzi z roku 2002 z pracy: D.Z. Đokovic and K.D. Ikramov, *A square matrix is congruent to its transpose*. J. Algebra 257 (2002), 97–105, której recenzentem był medalista Fieldsa E. Zelmanov! Dotąd jest mnóstwo prac wokół tego tematu.

Kilka uwag zanim przejdziemy do dowodu.

- Problem stwierdzenia kiedy pewne dwie macierze symetryczne nad ciałem K charakterystyki różnej od 2 są kongruentne jest nierozwiązany dla pewnych ciał. Zgodnie z twierdzeniem, które wykażemy, sprowadza się do pytania o to kiedy macierze diagonalne są kongruentne. O tym będzie za kilka wykładów.

  Przykład. Weźmy macierze zespolone

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Macierze te są kongruentne nad $\mathbb{C}$, ponieważ:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Nad $\mathbb{R}$ macierze A i B nie będą kongruentne, a nad $\mathbb{Q}$ także B i C nie są kongruentne. Dowód? Wyznaczniki. W ciałach $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ brakuje pierwiastków. Intuicja: $\mathbb{R}$ brakuje *tylko jednego* pierwiastka, ale w $\mathbb{Q}$ – nieskończenie wielu.

Kilka uwag zanim przejdziemy do dowodu.

- Co z formami i macierzami nad ciałem charaktekterystyki 2? Wychodząc z twierdzenia, które pokażemy, można uzasadnić następujące dwa rezultaty.

Twierdzenie

Jeśli (V, h) jest przestrzenią dwuliniową taką, że forma h nie jest alternująca, wówczas w V jest baza ortogonalna. W konsekwencji dla każdej macierzy symetrycznej $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ o elementach z ciała K charakterystyki 2 takiej, że $a_{ii} \neq 0$ dla co najmniej jednego i, istnieje taka macierz odwracalna $P \in M_n(K)$, że $P^T AP$ jest diagonalna.

Twierdzenie

Każda macierz antysymetryczna odwracalna i mająca zera na przekątnej jest kongruentna z macierzą blokowo-diagonalną o blokach postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest **nieosobliwa**, jeśli dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A})$ jest odwracalna. Będziemy wtedy mówić krótko, że h jest **formą nieosobliwą** oraz, że V jest nieosobliwa. Jeśli macierz $G(h, \mathcal{A})$ nie jest odwracalna, to mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) (krócej: forma h/przestrzeń V) jest **osobliwa**. Jeśli $h(v, w) = 0$, dla każdych $v, w \in V$, to mówimy, że forma h (przestrzeń V) jest **całkowicie zdegenerowana**.

Definicja

Mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest **nieosobliwa**, jeśli dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz $G(h, \mathcal{A})$ jest odwracalna. Będziemy wtedy mówić krótko, że h jest **formą nieosobliwą** oraz, że V jest nieosobliwa. Jeśli macierz $G(h, \mathcal{A})$ nie jest odwracalna, to mówimy, że przestrzeń dwuliniowa (V, h) (krócej: forma h/przestrzeń V) jest **osobliwa**. Jeśli $h(v, w) = 0$, dla każdych $v, w \in V$, to mówimy, że forma h (przestrzeń V) jest **całkowicie zdegenerowana**.

Przykład: weźmy formę dwuliniową na $\mathbb{R}^4$ zadaną macierzą:

$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wówczas przestrzeń dwuliniowa (V, h) jest nieosobliwa, ale na podprzestrzeni $W = \text{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ forma $h|_W$ jest osobliwa. Podprzestrzeń $Z = \text{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ jest natomiast całkowicie zdegenerowana względem h.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód.

- Załóżmy (i). Przypuśćmy, ze dla pewnego $0 \neq \alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = 0$, dla wszystkich $\beta \in V$.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód.

- Załóżmy (i). Przypuśćmy, ze dla pewnego $0 \neq \alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = 0$, dla wszystkich $\beta \in V$.
- Wektor α dopełniamy do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V postaci $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s)$.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód.

- Założmy (i). Przypuśćmy, ze dla pewnego $0 \neq \alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = 0$, dla wszystkich $\beta \in V$.
- Wektor α dopełniamy do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V postaci $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s)$.
- Wówczas $G(h, \mathcal{A})$ ma zerowy pierwszy wiersz i kolumnę, bo $h(\alpha, \alpha) = 0$ oraz $h(\alpha, \beta_i) = h(\beta_i, \alpha) = 0$, dla $i = 1, \ldots, s$.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód.

- Załóżmy (i). Przypuśćmy, ze dla pewnego $0 \neq \alpha \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = 0$, dla wszystkich $\beta \in V$.
- Wektor α dopełniamy do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V postaci $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_s)$.
- Wówczas $G(h, \mathcal{A})$ ma zerowy pierwszy wiersz i kolumnę, bo $h(\alpha, \alpha) = 0$ oraz $h(\alpha, \beta_i) = h(\beta_i, \alpha) = 0$, dla $i = 1, \dots, s$.
- A zatem $G(h, \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, sprzeczność. Zatem (i) $\Rightarrow$ (ii).

Stwierdzenie

Niech (V,h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V,h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha,\beta) \neq 0$.

Dowód cd.

- Załóżmy, że zachodzi (ii), ale dla pewnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, tzn. jej wiersze są liniowo zależne.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód cd.

- Załóżmy, że zachodzi (ii), ale dla pewnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, tzn. jej wiersze są liniowo zależne.
- Istnieje więc taki wektor niezerowy $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ taki, że:

$$x_1 \begin{bmatrix} h(\alpha_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_1, \alpha_n) \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} h(\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód cd.

- Załóżmy, że zachodzi (ii), ale dla pewnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, tzn. jej wiersze są liniowo zależne.
- Istnieje więc taki wektor niezerowy $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ taki, że:

$$x_1 \begin{bmatrix} h(\alpha_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_1, \alpha_n) \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} h(\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Zatem dla $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$ mamy $h(\alpha, \alpha_i) = 0$. Zatem z dwuliniowości $h(\alpha, \beta) = 0$, dla każdego $\beta \in V$.

Stwierdzenie

Niech (V, h) będzie dwuliniowa. Następujące warunki są równoważne:

(i) (V, h) jest nieosobliwa,

(ii) dla każdego $0 \neq \alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$.

Dowód cd.

- Załóżmy, że zachodzi (ii), ale dla pewnej bazy $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ macierz $G(h; \mathcal{A})$ jest nieodwracalna, tzn. jej wiersze są liniowo zależne.
- Istnieje więc taki wektor niezerowy $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ taki, że:

$$x_1 \begin{bmatrix} h(\alpha_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_1, \alpha_n) \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} h(\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ h(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Zatem dla $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$ mamy $h(\alpha, \alpha_i) = 0$. Zatem z dwuliniowości $h(\alpha, \beta) = 0$, dla każdego $\beta \in V$.
- Na mocy (ii) mamy $\alpha = 0$, co przeczy niezerowości $(x_1, \dots, x_n)$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Załóżmy, że $V = W \oplus W^{\perp}$. Mamy zatem $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Załóżmy, że $V = W \oplus W^{\perp}$. Mamy zatem $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
- Gdyby W była osobliwa to, na mocy wcześniejszego stwierdzenia, istniałby wektor $0 \neq \alpha \in W$ taki, że dla każdego $\beta \in W$ mielibyśmy $h(\alpha, \beta) = 0$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2).

- Załóżmy, że $V = W \oplus W^{\perp}$. Mamy zatem $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
- Gdyby W była osobliwa to, na mocy wcześniejszego stwierdzenia, istniałby wektor $0 \neq \alpha \in W$ taki, że dla każdego $\beta \in W$ mielibyśmy $h(\alpha, \beta) = 0$.
- W szczególności $h(\alpha, \alpha) = 0$, czyli $\alpha \in W^{\perp}$. A zatem $0 \neq \alpha \in W \cap W^{\perp}$, sprzeczność.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Mamy wykazać, że każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $\alpha' \in W$ oraz $\alpha'' \in W^{\perp}$ takie, że $\alpha = \alpha' + \alpha''$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Następujące warunki są równoważne:

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$,

(2) W jest nieosobliwa.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1).

- Mamy wykazać, że każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone $\alpha' \in W$ oraz $\alpha'' \in W^{\perp}$ takie, że $\alpha = \alpha' + \alpha''$.
- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie bazą przestrzeni W.
  Istnienie i jednoznaczność wektora $\alpha' = x_1\alpha_1 + \ldots + x_k\alpha_k$ spełniającego powyższe warunki jest równoważne istnieniu i jednoznaczności współczynników $x_1, \ldots, x_k \in K$ takich, że $\alpha - (x_1\alpha_1 + \ldots + x_k\alpha_k) \in W^{\perp}$.

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1). Cd.

- Czyli (1) $\Leftrightarrow$ poniższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$h(\alpha_j, \alpha - x_1\alpha_1 - \ldots - x_k\alpha_k) = 0, \text{ dla każdego } j = 1, \ldots, k.$$

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1). Cd.

- Czyli (1) $\Leftrightarrow$ poniższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie:
$$h(\alpha_j, \alpha - x_1\alpha_1 - \ldots - x_k\alpha_k) = 0, \text{ dla każdego } j = 1, \ldots, k.$$
- Z dwuliniowości h : (1) $\Leftrightarrow$ poniższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie:
$$\begin{cases} x_1 h(\alpha_1, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_1, \alpha_k) & = h(\alpha_1, \alpha) \\ x_1 h(\alpha_2, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_2, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_2, \alpha_k) & = h(\alpha_2, \alpha) \\ & \vdots \\ x_1 h(\alpha_k, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_k, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_k, \alpha_k) & = h(\alpha_k, \alpha) \end{cases}.$$

Dowód (2) $\Rightarrow$ (1). Cd.

- Czyli (1) $\Leftrightarrow$ poniższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$h(\alpha_j, \alpha - x_1\alpha_1 - \ldots - x_k\alpha_k) = 0, \text{ dla każdego } j = 1, \ldots, k.$$

- Z dwuliniowości h : (1) $\Leftrightarrow$ poniższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 h(\alpha_1, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_1, \alpha_k) & = h(\alpha_1, \alpha) \\ x_1 h(\alpha_2, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_2, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_2, \alpha_k) & = h(\alpha_2, \alpha) \\ & \vdots \\ x_1 h(\alpha_k, \alpha_1) + x_2 h(\alpha_k, \alpha_2) + \ldots + x_k h(\alpha_k, \alpha_k) & = h(\alpha_k, \alpha) \end{cases}.$$

- Macierzą współczynników tego układu jest macierz $G(h|_W, \mathcal{A})$, na mocy (2) – odwracalna. Twierdzenia Kroneckera-Capelliego układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. To kończy dowód istnienia i jednoznaczności wektora α'.

Uwaga

Układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.

Uwaga

Układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.

Dowód.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym złożonym z wektorów nieizotropowych. Przypuśćmy, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$.

Uwaga

Układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.

Dowód.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym złożonym z wektorów nieizotropowych. Przypuśćmy, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$.
- Dla każdej formy dwuliniowej na V oraz wektora $v \in V$ mamy $h(0, v) = h(v, 0) = 0$, bo $h(0, v) = 0 \cdot h(v, v) = 0$. A zatem:

$$\begin{aligned} 0 = h(0, \alpha_j) &= h(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k, \alpha_j) = \\ &= a_1 h(\alpha_1, \alpha_j) + \ldots + a_j h(\alpha_j, \alpha_j) + \ldots + a_k h(\alpha_k, \alpha_j) = \\ &= a_j h(\alpha_j, \alpha_j). \end{aligned}$$

Uwaga

Układ prostopadły złożony z wektorów nieizotropowych jest liniowo niezależny.

Dowód.

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym złożonym z wektorów nieizotropowych. Przypuśćmy, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$ mamy: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = 0$.
- Dla każdej formy dwuliniowej na V oraz wektora $v \in V$ mamy $h(0, v) = h(v, 0) = 0$, bo $h(0, v) = 0 \cdot h(v, v) = 0$. A zatem:

$$\begin{aligned} 0 = h(0, \alpha_j) &= h(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k, \alpha_j) = \\ &= a_1 h(\alpha_1, \alpha_j) + \ldots + a_j h(\alpha_j, \alpha_j) + \ldots + a_k h(\alpha_k, \alpha_j) = \\ &= a_j h(\alpha_j, \alpha_j). \end{aligned}$$

- Układ nasz składa się z wektorów nieizotropowych, czyli $h(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$. Skoro $a_j h(\alpha_j, \alpha_j) = 0$, to $a_i = 0$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- **Przypadek 1.** Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha)$ jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- **Przypadek 1.** Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha)$ jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.
- Zatem $\dim W^{\perp} = n - 1$. Z zał. indukcyjnego $W^{\perp}$ ma bazę prostopadłą, np. $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Wówczas $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą V.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- **Przypadek 1.** Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha)$ jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.
- Zatem $\dim W^{\perp} = n - 1$. Z zał. indukcyjnego $W^{\perp}$ ma bazę prostopadłą, np. $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Wówczas $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą V.
- **Przypadek 2.** Wszystkie wektory przestrzeni V są izotropowe. Dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $0 = h(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = h(\alpha, \alpha) + 2h(\alpha, \beta) + h(\beta, \beta) = 2h(\alpha, \beta)$.

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- **Przypadek 1.** Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha)$ jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.
- Zatem $\dim W^{\perp} = n - 1$. Z zał. indukcyjnego $W^{\perp}$ ma bazę prostopadłą, np. $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Wówczas $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą V.
- **Przypadek 2.** Wszystkie wektory przestrzeni V są izotropowe. Dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $0 = h(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = h(\alpha, \alpha) + 2h(\alpha, \beta) + h(\beta, \beta) = 2h(\alpha, \beta)$.
- Stąd $h(\alpha, \beta) = 0$, bo $2 \neq 0$ w K (założenie o charakterystyce!).

Twierdzenie

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem charakterystyki różnej od 2. Wówczas (V, h) ma bazę prostopadłą.

Dowód. Stosujemy indukcję po V. Dla $\dim V = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dowodzimy dla $\dim V = n$.

- **Przypadek 1.** Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem nieizotropowym. Wówczas $W = \mathrm{lin}(\alpha)$ jest przestrzenią nieosobliwą. Stąd $V = W \oplus W^{\perp}$, na mocy wcześniejszego twierdzenia.
- Zatem $\dim W^{\perp} = n - 1$. Z zał. indukcyjnego $W^{\perp}$ ma bazę prostopadłą, np. $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Wówczas $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą V.

- **Przypadek 2.** Wszystkie wektory przestrzeni V są izotropowe. Dla każdych $\alpha, \beta \in V$ mamy $0 = h(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = h(\alpha, \alpha) + 2h(\alpha, \beta) + h(\beta, \beta) = 2h(\alpha, \beta)$.
- Stąd $h(\alpha, \beta) = 0$, bo $2 \neq 0$ w K (założenie o charakterystyce!).
- Zatem wszystkie pary wektorów w przestrzeni V są prostopadłe,

Na kolejnym wykładzie:

- iloczyn skalarny i jego różne oblicza w matematyce,
- norma, kąt, nierówność Schwarza,
- współrzędne w bazie prostopadłej, ortogonalizacja,
- przestrzeń euklidesowa, macierz Grama iloczynu skalarnego,
- kryterium wyróżniające iloczyn skalarny spośród form dwuliniowych,

a dalej także:

- objętość, orientacja, iloczyn wektorowy,
- izometrie przestrzeni euklidesowej
- izometrie przestrzeni dwuliniowej, twierdzenie o przedłużaniu, klasyfikacja macierzy kongruentnych, twierdzenie Sylvestera o bezwładności.