Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 7, 23.03.2021 r.

Twierdzenie Jordana

Jeżeli endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest triangularyzowalny nad ciałem K to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V zwana **bazą Jordana**, w której macierz ϕ ma postać Jordana. W szczególności jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, wówczas każdy endomorfizm przestrzeni V jest w pewnej bazie w postaci Jordana.

Wniosek

Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ można sprowadzić nad K do postaci Jordana, to następujące warunki są równoważne:

- A jest podobna do B,
- dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy: $r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m$.

Twierdzenie

Jeśli $K \subseteq L$ są ciałami oraz $A, B \in M_n(K)$, to jeśli A, B są podobne nad L, to są podobne nad K.

Problemy na dziś.

- Z twierdzenia Jordana wynika, że endomorfizm triangularyzowalny można rozłożyć na sumę endomorfizmu nilpotentnego i diagonalizowalnego. Przykładowo, dla macierzy w postaci Jordana tego endomorfizmu można wydzielić *część diagonalną* i * część ściśle górnotrójkątną*.

Problemy na dziś.

- Z twierdzenia Jordana wynika, że endomorfizm triangularyzowalny można rozłożyć na sumę endomorfizmu nilpotentnego i diagonalizowalnego. Przykładowo, dla macierzy w postaci Jordana tego endomorfizmu można wydzielić *część diagonalną* i * część ściśle górnotrójkątną*.
- Czy rozkład ten jest jednoznaczny? Nie, bo choćby

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  a przecież ϕ zadane macierzą A jest diagonalizowalne.

Problemy na dziś.

- Z twierdzenia Jordana wynika, że endomorfizm triangularyzowalny można rozłożyć na sumę endomorfizmu nilpotentnego i diagonalizowalnego. Przykładowo, dla macierzy w postaci Jordana tego endomorfizmu można wydzielić *część diagonalną* i * część ściśle górnotrójkątną*.
- Czy rozkład ten jest jednoznaczny? Nie, bo choćby
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
a przecież ϕ zadane macierzą A jest diagonalizowalne.
- W praktyce przydatny jest nie tylko rozkład $A = D + N$, gdzie D to macierz diagonalna i N to macierz nilpotentna, ale też fakt, że $DN = ND$, bo wtedy
$$A^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k}.$$

Problemy na dziś.

- Z twierdzenia Jordana wynika, że endomorfizm triangularyzowalny można rozłożyć na sumę endomorfizmu nilpotentnego i diagonalizowalnego. Przykładowo, dla macierzy w postaci Jordana tego endomorfizmu można wydzielić *część diagonalną* i * część ściśle górnotrójkątną*.
- Czy rozkład ten jest jednoznaczny? Nie, bo choćby
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
a przecież ϕ zadane macierzą A jest diagonalizowalne.
- Dziś okaże się, że rozkład endomorfizmu triangularyzowalnego na składową nilpotentną i diagonalną jest jednoznaczny, jeśli zażądamy, by składowe te były przemienne. Jest to tzw. rozkład Jordana-Chevalleya. Potem rozważymy delikatny przypadek nietriangularyzowalny. Zacznijmy od prostej sytuacji.

Lemat Fittinga (czyli co można uzyskać zawsze)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_0 \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_0$, gdzie ϕ jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_0 \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_0$, gdzie ϕ jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód - istnienie V_n, V_o.

- Mamy dwa łańcuchy podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych:

$$\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ker(\phi^3) \subseteq \dots, \quad \mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi^2) \supseteq \mathrm{im}(\phi^3) \supseteq \dots$$

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_0 \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_0$, gdzie ϕ jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód - istnienie V_n, V_o.

- Mamy dwa łańcuchy podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych:
$$\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ker(\phi^3) \subseteq \dots, \quad \mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi^2) \supseteq \mathrm{im}(\phi^3) \supseteq \dots$$
- Skoro $\dim V < \infty$, to te łańcuchy się stabilizują – pierwszy do pewnej V_n, drugi do pewnej V_o. Załóżmy, że $V_o \neq 0$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_0 \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_0$, gdzie ϕ jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód - istnienie V_n, V_o.

- Mamy dwa łańcuchy podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych:

$$\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ker(\phi^3) \subseteq \dots, \quad \mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi^2) \supseteq \mathrm{im}(\phi^3) \supseteq \dots$$

- Skoro $\dim V < \infty$, to te łańcuchy się stabilizują – pierwszy do pewnej V_n, drugi do pewnej V_o. Załóżmy, że $V_o \neq 0$.
- Skoro $V_n = \ker(\phi^m)$, dla pewnego m, to $\phi^m(V_n) = 0$, czyli $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_0 \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_0$, gdzie ϕ jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód - istnienie V_n, V_o.

- Mamy dwa łańcuchy podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych:

$$\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ker(\phi^3) \subseteq \ldots, \quad \mathrm{im}(\phi) \supseteq \mathrm{im}(\phi^2) \supseteq \mathrm{im}(\phi^3) \supseteq \ldots$$

- Skoro $\dim V < \infty$, to te łańcuchy się stabilizują – pierwszy do pewnej V_n, drugi do pewnej V_o. Załóżmy, że $V_o \neq 0$.
- Skoro $V_n = \ker(\phi^m)$, dla pewnego m, to $\phi^m(V_n) = 0$, czyli $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny.
- Mamy też $V_o = \phi(V_o)$, a zatem $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, bo $\dim V_o < \infty$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód tego, że $V = V_n \oplus V_o$.

- Skoro $\phi^m(V_n) = 0$, zaś $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, to $V_n \cap V_o = \{0\}$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód tego, że $V = V_n \oplus V_o$.

- Skoro $\phi^m(V_n) = 0$, zaś $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, to $V_n \cap V_o = \{0\}$.
- Bez straty ogólności można przyjąć, że $V_n = \ker \phi^m$ oraz $V_o = \operatorname{im} \phi^m$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód tego, że $V = V_n \oplus V_o$.

- Skoro $\phi^m(V_n) = 0$, zaś $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, to $V_n \cap V_o = \{0\}$.
- Bez straty ogólności można przyjąć, że $V_n = \ker \phi^m$ oraz $V_o = \operatorname{im} \phi^m$.
- Skoro $\operatorname{im}(\phi^{2m}) = \operatorname{im}(\phi^m)$, to dla każdego $v \in V$ istnieje $w \in V$, że
$$\phi^m(v) = \phi^{2m}(w).$$

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód tego, że $V = V_n \oplus V_o$.

- Skoro $\phi^m(V_n) = 0$, zaś $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, to $V_n \cap V_o = \{0\}$.
- Bez straty ogólności można przyjąć, że $V_n = \ker \phi^m$ oraz $V_o = \operatorname{im} \phi^m$.
- Skoro $\operatorname{im}(\phi^{2m}) = \operatorname{im}(\phi^m)$, to dla każdego $v \in V$ istnieje $w \in V$, że

$$\phi^m(v) = \phi^{2m}(w).$$

- Stąd $\phi^m(v - \phi^m(w)) = \phi^m(v) - \phi^{2m}(w) = 0$, czyli $v - \phi^m(w) \in V_n$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód tego, że $V = V_n \oplus V_o$.

- Skoro $\phi^m(V_n) = 0$, zaś $\phi|_{V_o}$ jest izomorfizmem, to $V_n \cap V_o = \{0\}$.
- Bez straty ogólności można przyjąć, że $V_n = \ker \phi^m$ oraz $V_o = \operatorname{im} \phi^m$.
- Skoro $\operatorname{im}(\phi^{2m}) = \operatorname{im}(\phi^m)$, to dla każdego $v \in V$ istnieje $w \in V$, że

$$\phi^m(v) = \phi^{2m}(w).$$

- Stąd $\phi^m(v - \phi^m(w)) = \phi^m(v) - \phi^{2m}(w) = 0$, czyli $v - \phi^m(w) \in V_n$.
- Zatem dla każdego v mamy w takie, że $v = (v - \phi^m(w)) + \phi^m(w) \in V_n + V_o$.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód jednoznaczności rozkładu $V = V_n \oplus V_o$.

- Niech $V = A \oplus B$, przy czym $\phi|_A$ jest nilpotentny, zaś $\phi|_B$ – odwracalny.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód jednoznaczności rozkładu $V = V_n \oplus V_o$.

- Niech $V = A \oplus B$, przy czym $\phi|_A$ jest nilpotentny, zaś $\phi|_B$ – odwracalny.
- Wówczas $A \subseteq \ker(\phi^k)$, dla **pewnego** k oraz $B \subseteq \mathrm{im}(\phi^k)$, dla **każdego** k.

Lemat Fittinga

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczony rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_n \oplus V_o$ taki, że:

- $\phi|_{V_n}$ jest nilpotentny,
- $\phi|_{V_o}$ jest odwracalny.

Jeśli $V_n, V_o \neq 0$, to $\phi = \phi_n + \phi_o$, gdzie ϕ_n jest nilpotentny, zaś ϕ_o - odwracalny.

Dowód jednoznaczności rozkładu $V = V_n \oplus V_o$.

- Niech $V = A \oplus B$, przy czym $\phi|_A$ jest nilpotentny, zaś $\phi|_B$ – odwracalny.
- Wówczas $A \subseteq \ker(\phi^k)$, dla **pewnego** k oraz $B \subseteq \mathrm{im}(\phi^k)$, dla **każdego** k.
- Stąd $A \subseteq V_n$ oraz $B \subseteq V_o$. Aby sumy wymiarów A, B dawały wymiar V, czyli sumę wymiarów V_n oraz V_o musi być $A = V_n$ oraz $B = V_o$.

Twierdzenie o addytywnym rozkładzie Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie triangularyzowalny. Wówczas istnieje jednoznaczny rozkład

$$\phi = \phi_S + \phi_N, \qquad (*)$$

- gdzie ϕ_S jest diagonalizowalny[a],
- ϕ_N jest nilpotentny,
- oraz $\phi_S \circ \phi_N = \phi_N \circ \phi_S$.

Co więcej ϕ_S, ϕ_N należą do algebry endomorfizmu ϕ (są wielomianami od ϕ).

---

[a] Dlaczego więc indeks S, a nie D? Fakt ten ugólnia sie tak, że zamiast diagonalizowalności wystarczy założyć, że endomorfizm jest „półprosty"(ang. **s**emisimple). Więcej na końcu wykładu.

Twierdzenie o addytywnym rozkładzie Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie triangularyzowalny. Wówczas istnieje jednoznaczny rozkład

$$\phi = \phi_S + \phi_N, \qquad (*)$$

- gdzie ϕ_S jest diagonalizowalny[a],
- ϕ_N jest nilpotentny,
- oraz $\phi_S \circ \phi_N = \phi_N \circ \phi_S$.

Co więcej ϕ_S, ϕ_N należą do algebry endomorfizmu ϕ (są wielomianami od ϕ).

[a] Dlaczego więc indeks S, a nie D? Fakt ten ugólnia sie tak, że zamiast diagonalizowalności wystarczy załozyć, że endomorfizm jest „półprosty"(ang. **s**emisimple). Więcej na końcu wykładu.

Plan dowodu. Najpierw zajmiemy się problemem jednoznaczności, a potem istnienia rozkładu $(*)$. Zacznijmy od ogólnych obserwacji.

Kilka uwag wstępnych.

- Niech $D_n(K)$ oraz $N_n(K)$ oznacza odpowiednio zbiory macierzy diagonalizowalnych nad K oraz nilpotentnych nad K.

Kilka uwag wstępnych.

- Niech $D_n(K)$ oraz $N_n(K)$ oznacza odpowiednio zbiory macierzy diagonalizowalnych nad K oraz nilpotentnych nad K.
- Żaden z tych zbiorów nie jest podprzestrzenią $M_n(K)$, np:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin D_2(K), \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin N_2(K).$$

Kilka uwag wstępnych.

- Niech $D_n(K)$ oraz $N_n(K)$ oznacza odpowiednio zbiory macierzy diagonalizowalnych nad K oraz nilpotentnych nad K.
- Żaden z tych zbiorów nie jest podprzestrzenią $M_n(K)$, np:
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin D_2(K), \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin N_2(K).$$
- Zagadka: czym są $\mathrm{lin}(D_n(K))$ oraz $\mathrm{lin}(N_n(K))$. Czy to całe $M_n(K)$?

Kilka uwag wstępnych.

- Niech $D_n(K)$ oraz $N_n(K)$ oznacza odpowiednio zbiory macierzy diagonalizowalnych nad K oraz nilpotentnych nad K.
- Żaden z tych zbiorów nie jest podprzestrzenią $M_n(K)$, np:
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin D_2(K), \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin N_2(K).$$
- Zagadka: czym są $\mathrm{lin}(D_n(K))$ oraz $\mathrm{lin}(N_n(K))$. Czy to całe $M_n(K)$?
- Endomorfizmy $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ nazwiemy **przemiennymi**, jeśli
$$\phi \circ \phi = \phi \circ \psi.$$
Okazuje się, że suma **przemiennych** endomorfizmów diagonalizowalnych z $\mathrm{End}(V)$ jest diagonalizowalna, oraz suma przemiennych endomorfizmów nilpotentnych z $\mathrm{End}(V)$ jest nilpotentna. Drugi fakt jest prosty, ale pierwszy...

Definicja

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad ciałem K. Powiemy, że rodzina endomorfizmów $\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}$ jest **wspólnie diagonalizowalna** nad K, jeśli istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V, w której dla każdego $t \in T$ macierz $M(\phi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna (czyli $\mathcal{A}$ to baza złożona z wektorów własnych tych ϕ_t).

Definicja

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad ciałem K. Powiemy, że rodzina endomorfizmów $\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}$ jest **wspólnie diagonalizowalna** nad K, jeśli istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V, w której dla każdego $t \in T$ macierz $M(\phi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna (czyli $\mathcal{A}$ to baza złożona z wektorów własnych tych ϕ_t).

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad ciałem K oraz niech $\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}$ będzie rodziną endomorfizmów diagonalizowalnych nad K. Następujące warunki sa równoważne:

(1) Dowolne dwa elementy rodziny $\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}$ są przemienne.

(2) Rodzina $\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}$ jest **wspólnie diagonalizowalna** nad K.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.
- Oczywiście V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda_i)}$, zatem dla każdego $w \in W$ możemy zapisać

$$w = v_1 + \ldots + v_r, \text{ gdzie } v_i \in V_{(\lambda_i)}. \qquad (\dagger)$$

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.
- Oczywiście V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda_i)}$, zatem dla każdego $w \in W$ możemy zapisać

$$w = v_1 + \ldots + v_r, \text{ gdzie } v_i \in V_{(\lambda_i)}. \qquad (\dagger)$$

- Pokazujemy, że $v_i \in W$, co będzie oznaczało, że $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, gdzie $W_i = V_{(\lambda_i)} \cap W$. Oczywiście dla $i \neq j$ mamy $W_i \cap W_j = \{0\}$.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.
- Oczywiście V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda_i)}$, zatem dla każdego $w \in W$ możemy zapisać

$$w = v_1 + \ldots + v_r, \text{ gdzie } v_i \in V_{(\lambda_i)}. \qquad (\dagger)$$

- Pokazujemy, że $v_i \in W$, co będzie oznaczało, że $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, gdzie $W_i = V_{(\lambda_i)} \cap W$. Oczywiście dla $i \neq j$ mamy $W_i \cap W_j = \{0\}$.
- Weźmy najmniejsze r takie, że dla pewnego w w rozkładzie $(\dagger)$ pewne v_i nie należy do W. Mamy $\phi(w) - \lambda_1 w = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k \in W$.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.
- Oczywiście V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda_i)}$, zatem dla każdego $w \in W$ możemy zapisać
$$w = v_1 + \ldots + v_r, \text{ gdzie } v_i \in V_{(\lambda_i)}. \qquad (\dagger)$$
- Pokazujemy, że $v_i \in W$, co będzie oznaczało, że $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, gdzie $W_i = V_{(\lambda_i)} \cap W$. Oczywiście dla $i \neq j$ mamy $W_i \cap W_j = \{0\}$.
- Weźmy najmniejsze r takie, że dla pewnego w w rozkładzie $(\dagger)$ pewne v_i nie należy do W. Mamy $\phi(w) - \lambda_1 w = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k \in W$.
- Z minimalności r mamy $(\lambda_i - \lambda_1)v_i \in W$, dla $1 < i < k$. Ale $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, czyli $v_2, \ldots, v_r \in W$. Na mocy $(\dagger)$ także $v_1 \in W$. Sprzeczność z wyborem w.

Lemat 1

Jeśli $\phi : V \to V$ jest diagonalizowalny i W jest ϕ-niezmiennicza, to $\phi|_W : W \to W$ jest również diagonalizowalny.

Dowód.

- Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ będą parami różnymi wartościami własnymi ϕ.
- Oczywiście V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda_i)}$, zatem dla każdego $w \in W$ możemy zapisać

$$w = v_1 + \ldots + v_r, \text{ gdzie } v_i \in V_{(\lambda_i)}. \qquad (\dagger)$$

- Pokazujemy, że $v_i \in W$, co będzie oznaczało, że $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$, gdzie $W_i = V_{(\lambda_i)} \cap W$. Oczywiście dla $i \neq j$ mamy $W_i \cap W_j = \{0\}$.
- Weźmy najmniejsze r takie, że dla pewnego w w rozkładzie $(\dagger)$ pewne v_i nie należy do W. Mamy $\phi(w) - \lambda_1 w = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_1)v_k \in W$.
- Z minimalności r mamy $(\lambda_i - \lambda_1)v_i \in W$, dla $1 < i < k$. Ale $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, czyli $v_2, \ldots, v_r \in W$. Na mocy $(\dagger)$ także $v_1 \in W$. Sprzeczność z wyborem w.
- Zatem W jest sumą prostą W_i, czyli $\phi|_W$ jest diagonalizowalny.

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.
- Skoro ϕ_r jest diagonalizowalny, to V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda)}$ względem ϕ_r, gdzie λ to wartość własna ϕ_r.

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.
- Skoro ϕ_r jest diagonalizowalny, to V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda)}$ względem ϕ_r, gdzie λ to wartość własna ϕ_r.
- Dla $i \neq r$ mamy $\phi_i \circ \phi_r = \phi_r \circ \phi_i$, zatem jeśli $v \in V_{(\lambda)}$, to

$$\phi_r(\phi_i(v)) = \phi_i(\phi_r(v)) = \phi_i(\lambda v) = \lambda \cdot \phi_i(v).$$

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.
- Skoro ϕ_r jest diagonalizowalny, to V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda)}$ względem ϕ_r, gdzie λ to wartość własna ϕ_r.
- Dla $i \neq r$ mamy $\phi_i \circ \phi_r = \phi_r \circ \phi_i$, zatem jeśli $v \in V_{(\lambda)}$, to

$$\phi_r(\phi_i(v)) = \phi_i(\phi_r(v)) = \phi_i(\lambda v) = \lambda \cdot \phi_i(v).$$

- Zatem $V_{(\lambda)}$ jest ϕ_i-niezmiennicza ($v \in V_{(\lambda)} \Rightarrow \phi_i(v) \in V_{(\lambda)}$).

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.
- Skoro ϕ_r jest diagonalizowalny, to V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda)}$ względem ϕ_r, gdzie λ to wartość własna ϕ_r.
- Dla $i \neq r$ mamy $\phi_i \circ \phi_r = \phi_r \circ \phi_i$, zatem jeśli $v \in V_{(\lambda)}$, to

$$\phi_r(\phi_i(v)) = \phi_i(\phi_r(v)) = \phi_i(\lambda v) = \lambda \cdot \phi_i(v).$$

- Zatem $V_{(\lambda)}$ jest ϕ_i-niezmiennicza ($v \in V_{(\lambda)} \Rightarrow \phi_i(v) \in V_{(\lambda)}$).
- Oczywiście $\phi_1|_{V_{(\lambda)}}, \ldots, \phi_{r-1}|_{V_{(\lambda)}}$ są przemienne. Zatem z Lematu 1 każde z tych przekształceń jest diagonalizowalne. Z założenia indukcyjnego endomorfizmy te są wspólnie diagonalizowalne przez pewną bazę $\mathcal{A}_\lambda$ przestrzeni $V_{(\lambda)}$ (czyli $\phi_r|_{V_{(\lambda)}}$ też się w niej diagonalizuje).

Twierdzenie o wspólnej diagonalizowalności. Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2)

- Zaczniemy od sytuacji, gdy $T = \{1, 2, \ldots, r\}$. Stosujemy indukcję. Dla $r = 1$ teza jest jasna, załóżmy $r \geq 2$.
- Skoro ϕ_r jest diagonalizowalny, to V jest sumą prostą podprzestrzeni własnych $V_{(\lambda)}$ względem ϕ_r, gdzie λ to wartość własna ϕ_r.
- Dla $i \neq r$ mamy $\phi_i \circ \phi_r = \phi_r \circ \phi_i$, zatem jeśli $v \in V_{(\lambda)}$, to

$$\phi_r(\phi_i(v)) = \phi_i(\phi_r(v)) = \phi_i(\lambda v) = \lambda \cdot \phi_i(v).$$

- Zatem $V_{(\lambda)}$ jest ϕ_i-niezmiennicza ($v \in V_{(\lambda)} \Rightarrow \phi_i(v) \in V_{(\lambda)}$).
- Oczywiście $\phi_1|_{V_{(\lambda)}}, \ldots, \phi_{r-1}|_{V_{(\lambda)}}$ są przemienne. Zatem z Lematu 1 każde z tych przekształceń jest diagonalizowalne. Z założenia indukcyjnego endomorfizmy te są wspólnie diagonalizowalne przez pewną bazę $\mathcal{A}_\lambda$ przestrzeni $V_{(\lambda)}$ (czyli $\phi_r|_{V_{(\lambda)}}$ też się w niej diagonalizuje).
- Skoro $V = V_{(\lambda_1)} \oplus \ldots \oplus V_{(\lambda_r)}$, gdzie λ_i to wartości własne ϕ_i, to biorąc bazę $(\mathcal{A}_{(\lambda_1)}, \ldots, \mathcal{A}_{(\lambda_r)})$ przestrzeni V dostajemy wspólną bazę wektorów własnych dla wszystkich ϕ_i, dla $i = 1, \ldots, r$.

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), przypadek ogólny.

- Niech $U = \mathrm{lin}(\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}) \subseteq \mathrm{End}(V)$.

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), przypadek ogólny.

- Niech $U = \mathrm{lin}(\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}) \subseteq \mathrm{End}(V)$.
- Skoro $\mathrm{End}(V)$ jest skończenie wymiarowa, to U też.

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), przypadek ogólny.

- Niech $U = \mathrm{lin}(\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}) \subseteq \mathrm{End}(V)$.
- Skoro $\mathrm{End}(V)$ jest skończenie wymiarowa, to U też.

Dowód implikacji (2) $\Rightarrow$ (1).

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), przypadek ogólny.

- Niech $U = \mathrm{lin}(\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}) \subseteq \mathrm{End}(V)$.
- Skoro $\mathrm{End}(V)$ jest skończenie wymiarowa, to U też.

Dowód implikacji (2) $\Rightarrow$ (1).

- Załóżmy, że dla $A, B \in M_n(K)$ istnieje macierz odwracalna P, że
$$P^{-1} D_1 P = A, \quad P^{-1} D_2 P = B,$$
gdzie D_1, D_2 są diagonalne.

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2), przypadek ogólny.

- Niech $U = \mathrm{lin}(\{\phi_t \in \mathrm{End}(V), t \in T\}) \subseteq \mathrm{End}(V)$.
- Skoro $\mathrm{End}(V)$ jest skończenie wymiarowa, to U też.

Dowód implikacji (2) $\Rightarrow$ (1).

- Załóżmy, że dla $A, B \in M_n(K)$ istnieje macierz odwracalna P, że
$$P^{-1}D_1P = A, \quad P^{-1}D_2P = B,$$
gdzie D_1, D_2 są diagonalne.
- Jest jasne, że $D_1D_2 = D_2D_1$, zatem
$$(\underbrace{P^{-1}D_1P}_{A})(\underbrace{P^{-1}D_2P}_{B}) = P^{-1}D_1D_2P = P^{-1}D_2D_1P = (\underbrace{P^{-1}D_2P}_{B})(\underbrace{P^{-1}D_1P}_{A}).$$

Wniosek

Jeśli $A, B \in M_n(K)$ są diagonalizowalne nad K i przemienne, to $A + B$ również jest diagonalizowalna nad K (wspólnie z A, B).

Wniosek

Jeśli $A, B \in M_n(K)$ są diagonalizowalne nad K i przemienne, to $A + B$ również jest diagonalizowalna nad K (wspólnie z A, B).

Fakt

Jeśli $A, B \in M_n(K)$ są nilpotentne i przemienne, to $A + B$ też jest nilpotentna.

Dowód. Niech $A^r = 0$ oraz $A^s = 0$. Weźmy $N = 2\max(r, s)$. Wówczas z wzoru dwumianowego

$$(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

wynika, że jeden z czynników A^k lub B^{N-k} jest zawsze zerowy, więc $A + B$ jest nilpotentna.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy
$$A = A_S + A_N = S + N,$$
gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy
$$A = A_S + A_N = S + N,$$
gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.
- Zatem $NA = N(S + N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S + N)N = AN$.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy
$$A = A_S + A_N = S + N,$$
gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.
- Zatem $NA = N(S + N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S + N)N = AN$.
- Analogicznie pokazujemy, że S jest przemienne z A.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy

$$A = A_S + A_N = S + N,$$

gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.

- Zatem $NA = N(S + N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S + N)N = AN$.
- Analogicznie pokazujemy, że S jest przemienne z A.
- S, N są też przemienne z każdym wielomianem od A, w tym z A_S, A_N.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy
$$A = A_S + A_N = S + N,$$
gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.
- Zatem $NA = N(S+N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S+N)N = AN$.
- Analogicznie pokazujemy, że S jest przemienne z A.
- S, N są też przemienne z każdym wielomianem od A, w tym z A_S, A_N.
- Wiemy zatem, że $A_S - S$ jest diagonalizowalna, zaś $N - A_N$ jest nilpotentna.

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy

$$A = A_S + A_N = S + N,$$

  gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N, SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.
- Zatem $NA = N(S + N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S + N)N = AN$.
- Analogicznie pokazujemy, że S jest przemienne z A.
- S, N są też przemienne z każdym wielomianem od A, w tym z A_S, A_N.
- Wiemy zatem, że $A_S - S$ jest diagonalizowalna, zaś $N - A_N$ jest nilpotentna.
- Ale $A_S - S = N - A_N$, zatem to musi być macierz zerowa (łatwe).

Dowód jednoznaczności addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Załóżmy, że dla macierzy $A \in M_n(K)$ mamy
$$A = A_S + A_N = S + N,$$
gdzie A_S, S - diagonalizowalne nad K, A_N, N - nilpotentne oraz $A_N A_S = A_S A_N$, $SN = NS$. Załóżmy też, że A_S, A_N są wielomianami od A.
- Zatem $NA = N(S+N) = NS + N^2 = SN + N^2 = (S+N)N = AN$.
- Analogicznie pokazujemy, że S jest przemienne z A.
- S, N są też przemienne z każdym wielomianem od A, w tym z A_S, A_N.
- Wiemy zatem, że $A_S - S$ jest diagonalizowalna, zaś $N - A_N$ jest nilpotentna.
- Ale $A_S - S = N - A_N$, zatem to musi być macierz zerowa (łatwe).
- Zatem $A_S = S$ oraz $A_N = N$.

Aby udowodnić istnienie rozkładu J-C potrzebujemy odświeżyć twierdzenie o rozkładzie prymarnym z Wykładu 3, w nieco rozszerzonej formie.

Aby udowodnić istnienie rozkładu J-C potrzebujemy odświeżyć twierdzenie o rozkładzie prymarnym z Wykładu 3, w nieco rozszerzonej formie.

Twierdzenie o rozkładzie prymarnym+

Niech $p = p_1 \dots p_k \in K[\lambda]$, gdzie $p_1, \dots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas ma miejsce rozkład ϕ-niezmienniczy

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker p_k(\phi)$$

Co więcej:

(a) Naturalne rzutowanie $\pi_i : \ker p(\phi) \to \ker p_i(\phi)$ jest wielomianem od ϕ,

(b) Jeśli $U \subseteq \ker p(\phi)$ jest ϕ-niezmiennicza, to mamy:

$$U = (\ker p_1(\phi) \cap U) \oplus \dots \oplus (\ker p_k(\phi) \cap U).$$

Aby udowodnić istnienie rozkładu J-C potrzebujemy odświeżyć twierdzenie o rozkładzie prymarnym z Wykładu 3, w nieco rozszerzonej formie.

Twierdzenie o rozkładzie prymarnym+

Niech $p = p_1 \ldots p_k \in K[\lambda]$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas ma miejsce rozkład ϕ-niezmienniczy

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \ldots \oplus \ker p_k(\phi)$$

Co więcej:

(a) Naturalne rzutowanie $\pi_i : \ker p(\phi) \to \ker p_i(\phi)$ jest wielomianem od ϕ.

(b) Jeśli $U \subseteq \ker p(\phi)$ jest ϕ-niezmiennicza, to mamy:

$$U = (\ker p_1(\phi) \cap U) \oplus \ldots \oplus (\ker p_k(\phi) \cap U).$$

Uwaga. W języku przestrzeni ilorazowych mamy po prostu:

$$V/\ker p(\phi) \simeq V/\ker p_1(\phi) \oplus \ldots \oplus V/\ker p_k(\phi).$$

Dowód.

- Przypomnijmy, że oznaczając $\widehat{p_i} = p/p_i$ pokazaliśmy, że istnieją $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$ takie, że $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.

Dowód.

- Przypomnijmy, że oznaczając $\widehat{p_i} = p/p_i$ pokazaliśmy, że istnieją $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$ takie, że $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Stąd wywnioskowaliśmy, że dla każdego $v = v_1 + \ldots + v_k \in \ker p(\phi)$, gdzie $v_i \in \ker p_i(\phi)$ mamy:

$$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v),$$

oraz $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v) \in \ker p_i(\phi)$.

Dowód.

- Przypomnijmy, że oznaczając $\widehat{p_i} = p/p_i$ pokazaliśmy, że istnieją $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$ takie, że $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Stąd wywnioskowaliśmy, że dla każdego $v = v_1 + \ldots + v_k \in \ker p(\phi)$, gdzie $v_i \in \ker p_i(\phi)$ mamy:

  $$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v),$$

  oraz $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v) \in \ker p_i(\phi)$.
- Zatem naturalne rzutowanie $\pi_i : \ker p(\phi) \to \ker p_i(\phi)$ to $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)$, co daje (a).

Dowód.

- Przypomnijmy, że oznaczając $\widehat{p_i} = p/p_i$ pokazaliśmy, że istnieją $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$ takie, że $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Stąd wywnioskowaliśmy, że dla każdego $v = v_1 + \ldots + v_k \in \ker p(\phi)$, gdzie $v_i \in \ker p_i(\phi)$ mamy:

$$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v),$$

  oraz $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v) \in \ker p_i(\phi)$.
- Zatem naturalne rzutowanie $\pi_i : \ker p(\phi) \to \ker p_i(\phi)$ to $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)$, co daje (a).
- Dowód (b) to rozwinięcie idei już dziś pokazanej dla ϕ-diagonalizowalnego. Bierzemy $u \in U$ i piszemy $u = u_1 + \ldots + u_k$, gdzie $u_i \in \ker p_i(\phi)$.

Dowód.

- Przypomnijmy, że oznaczając $\widehat{p_i} = p/p_i$ pokazaliśmy, że istnieją $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$ takie, że $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Stąd wywnioskowaliśmy, że dla każdego $v = v_1 + \ldots + v_k \in \ker p(\phi)$, gdzie $v_i \in \ker p_i(\phi)$ mamy:

$$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v),$$

  oraz $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v) \in \ker p_i(\phi)$.
- Zatem naturalne rzutowanie $\pi_i : \ker p(\phi) \to \ker p_i(\phi)$ to $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)$, co daje (a).
- Dowód (b) to rozwinięcie idei już dziś pokazanej dla ϕ-diagonalizowalnego. Bierzemy $u \in U$ i piszemy $u = u_1 + \ldots + u_k$, gdzie $u_i \in \ker p_i(\phi)$.
- Zatem $u_i = \pi_i(u) = q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(u) \in U$, bo U jest ϕ-niezmiennicza. Zatem $u_i \in U$. To dowodzi (b).

Dowód istnienia addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Korzystając z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe piszemy $V = V_{[\lambda_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[\lambda_k]}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – wartości własne endomorfizmu triangularyzowalnego ϕ.

Dowód istnienia addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Korzystając z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe piszemy $V = V_{[\lambda_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[\lambda_k]}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – wartości własne endomorfizmu triangularyzowalnego ϕ.
- Niech $\pi_i : V \to V_{[a_i]}$ będą naturalnymi rzutowaniami i niech

$$\phi_S := \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_k\pi_k \in \mathrm{End}(V).$$

Dowód istnienia addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Korzystając z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe piszemy $V = V_{[\lambda_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[\lambda_k]}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – wartości własne endomorfizmu triangularyzowalnego ϕ.
- Niech $\pi_i : V \to V_{[a_i]}$ będą naturalnymi rzutowaniami i niech
$$\phi_S := \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_k\pi_k \in \mathrm{End}(V).$$
- Zauważmy, że ϕ_S ograniczony do $V_{[\lambda_i]}$ to $\lambda_i\,\mathrm{id}$, czyli ϕ_S jest diagonalizowalny.

Dowód istnienia addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Korzystając z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe piszemy $V = V_{[\lambda_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[\lambda_k]}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – wartości własne endomorfizmu triangularyzowalnego ϕ.
- Niech $\pi_i : V \to V_{[a_i]}$ będą naturalnymi rzutowaniami i niech
$$\phi_S := \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_k\pi_k \in \mathrm{End}(V).$$
- Zauważmy, że ϕ_S ograniczony do $V_{[\lambda_i]}$ to $\lambda_i\,\mathrm{id}$, czyli ϕ_S jest diagonalizowalny.
- Zgodnie z ToRP(a) endomorfizmy π_i są wielomianami od ϕ, więc także ϕ_S jest wielomianem od ϕ. Stąd także ϕ_N określony równością $\phi - \phi_S$ jest wielomianem od ϕ. Oczywiście ϕ_S, ϕ_N jako wielomiany od ϕ są przemienne.

Dowód istnienia addytywnego rozkładu Jordana-Chevalleya.

- Korzystając z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe piszemy $V = V_{[\lambda_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[\lambda_k]}$, gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – wartości własne endomorfizmu triangularyzowalnego ϕ.
- Niech $\pi_i : V \to V_{[a_i]}$ będą naturalnymi rzutowaniami i niech
$$\phi_S := \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_k\pi_k \in \mathrm{End}(V).$$
- Zauważmy, że ϕ_S ograniczony do $V_{[\lambda_i]}$ to $\lambda_i \,\mathrm{id}$, czyli ϕ_S jest diagonalizowalny.
- Zgodnie z ToRP(a) endomorfizmy π_i są wielomianami od ϕ, więc także ϕ_S jest wielomianem od ϕ. Stąd także ϕ_N określony równością $\phi - \phi_S$ jest wielomianem od ϕ. Oczywiście ϕ_S, ϕ_N jako wielomiany od ϕ są przemienne.
- Mamy też:
$$\phi_N = \phi - \phi_S = \phi \circ (\underbrace{\pi_1 + \ldots + \pi_k}_{\mathrm{id}}) - (\lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_k\pi_k) = \sum_i (\phi - \lambda_i \,\mathrm{id}) \circ \pi_i,$$
czyli $\phi_N \equiv \phi - \lambda_i \,\mathrm{id}$ na $V_{[\lambda_i]}$, co oznacza, że ϕ_N jest nilpotentna.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie

$$\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S,$$

gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest nilpotentna.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.
- Ćwiczenie: ϕ_S to izomorfizm (ma niezerowe wartości własne).

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.
- Ćwiczenie: ϕ_S to izomorfizm (ma niezerowe wartości własne).
- Kładąc zatem $\phi_U = \mathrm{id} + \phi_S^{-1} \circ \phi_N$ mamy rozkład $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.
- Ćwiczenie: ϕ_S to izomorfizm (ma niezerowe wartości własne).
- Kładąc zatem $\phi_U = \mathrm{id} + \phi_S^{-1} \circ \phi_N$ mamy rozkład $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$.
- Gdyby istniał inny rozkład $\phi = \phi_{S'} \circ \phi_{U'}$ o szukanych własnościach, to mielibyśmy $\phi = \phi_{S'} + \phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.
- Ćwiczenie: ϕ_S to izomorfizm (ma niezerowe wartości własne).
- Kładąc zatem $\phi_U = \mathrm{id} + \phi_S^{-1} \circ \phi_N$ mamy rozkład $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$.
- Gdyby istniał inny rozkład $\phi = \phi_{S'} \circ \phi_{U'}$ o szukanych własnościach, to mielibyśmy $\phi = \phi_{S'} + \phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$.
- Z przemienności $\phi_{S'}, \phi_{U'}$ wnioskujemy, że $\phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$ jest nilpotentna.

Wniosek - multyplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie izomorfizmem triangularyzowalnym. Wówczas istnieje dokładnie jedno przedstawienie $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$, gdzie ϕ_S jest diagonalizowalna, zaś ϕ_U jest unipotentna, czyli z definicji: $\phi_U - \mathrm{id}$ jest endomorfizmem nilpotentnym.

Dowód.

- Rozważamy rozkład addytywny J-C postaci: $\phi = \phi_S + \phi_N$.
- Ćwiczenie: ϕ_S to izomorfizm (ma niezerowe wartości własne).
- Kładąc zatem $\phi_U = \mathrm{id} + \phi_S^{-1} \circ \phi_N$ mamy rozkład $\phi = \phi_S \circ \phi_U = \phi_U \circ \phi_S$.
- Gdyby istniał inny rozkład $\phi = \phi_{S'} \circ \phi_{U'}$ o szukanych własnościach, to mielibyśmy $\phi = \phi_{S'} + \phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$.
- Z przemienności $\phi_{S'}, \phi_{U'}$ wnioskujemy, że $\phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$ jest nilpotentna.
- Z jednoznaczności rozkładu addytywnego mamy zatem $\phi_{S'} = \phi_S$ oraz $\phi_N = \phi_{S'} \circ (\phi_{U'} - \mathrm{id})$. Zatem $\phi_{U'} = \phi_S^{-1} + \mathrm{id}$.

Uwaga. Bardzo ważny w algebrze jest problem wspólnej triangularyzowalności. Można pokazać, że endomorfizmy triangularyzowalne są wspólnie triangularyzowalne, gdy są przemienne, ale odwrotna implikacja nie zachodzi!

Uwaga. Bardzo ważny w algebrze jest problem wspólnej triangularyzowalności. Można pokazać, że endomorfizmy triangularyzowalne są wspólnie triangularyzowalne, gdy są przemienne, ale odwrotna implikacja nie zachodzi! Wspólna triangularyzowalność zachodzi w wielu innych sytuacjach i prowadzi do ważnych twierdzeń klasycznej teorii grup algebraicznych:

- tw. Levitzkiego – dowolna półgrupa macierzy nilpotentnych nad ciałem jest wspólnie triangularyzowalna,
- tw. Lie-Kolchina – grupa multiplikatywna macierzy unipotentnych nad ciałem jest wspólnie triangularyzowalna (to jest fundamentalny wynik!),
- *tw. H*: (Kaplanskiego?) – multiplikatywna półgrupa macierzy nad ciałem postaci $\lambda I + N$, gdzie N jest nilpotentna jest jednocześnie triangularyzowalna,

Uwaga. Bardzo ważny w algebrze jest problem wspólnej triangularyzowalności. Można pokazać, że endomorfizmy triangularyzowalne są wspólnie triangularyzowalne, gdy są przemienne, ale odwrotna implikacja nie zachodzi! Wspólna triangularyzowalność zachodzi w wielu innych sytuacjach i prowadzi do ważnych twierdzeń klasycznej teorii grup algebraicznych:

- tw. Levitzkiego – dowolna półgrupa macierzy nilpotentnych nad ciałem jest wspólnie triangularyzowalna,
- tw. Lie-Kolchina – grupa multiplikatywna macierzy unipotentnych nad ciałem jest wspólnie triangularyzowalna (to jest fundamentalny wynik!),
- *tw. H*: (Kaplanskiego?) – multiplikatywna półgrupa macierzy nad ciałem postaci $\lambda I + B$, gdzie N jest nilpotentna jest jednocześnie triangularyzowalna,

Dowody (poza ciałami algebraicznie domkniętymi) wymagają poważnych narzędzi algebraicznych np. tw. Wedderburna (jeśli algebra skończenie wymiarowa ma bazę nilpotentną, to jest sama nilpotentna). Więcej poczytać można w K. Gedeon: *Simultaneous Triangularization of Certain Sets of Matrices* (Google/Moodle).

Kilka uwag o rozkładach Jordana-Chevalleya dla endomorfizmów nietriangularyzowalnych. Tu diagonalizowalność następujemy półprostością.

Definicja

Endomorfizm ϕ przestrzeni liniowej V nazywamy **półprostym**, jeśli dla każdej ϕ-niezmienniczej podprzestrzeni U w V istnieje podprzestrzeń ϕ-niezmiennicza W taka, że $V = U \oplus W$.

Kilka uwag o rozkładach Jordana-Chevalleya dla endomorfizmów nietriangularyzowalnych. Tu diagonalizowalność następujemy półprostością.

Definicja

Endomorfizm ϕ przestrzeni liniowej V nazywamy **półprostym**, jeśli dla każdej ϕ-niezmienniczej podprzestrzeni U w V istnieje podprzestrzeń ϕ-niezmiennicza W taka, że $V = U \oplus W$.

Najważniejsze przykłady i antyprzykłady.

- endomorfizm diagonalizowalny jest półprosty, bo obcięcie do podprzestrzeni niezmienniczej jest również diagonalizowalne, ale odwrotny fakt nie zachodzi (rozważ np. obrót na płaszczyźnie rzeczywistej),
- endomorfizm nilpotentny stopnia większego niż 1 nie jest półprosty.

Definicja

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał (czyli ciało K jest zawarte w L). **Grupą Galois** tego rozszerzenia, ozn. G_K^L nazywamy zbiór wszystkich bijekcji $\sigma : L \to L$ takich, że

- $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,
- $\sigma(xy) = \sigma(x) \cdot \sigma(y)$,
- $\sigma(\lambda) = \lambda$, dla każdego $\lambda \in K$.

Definicja

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał (czyli ciało K jest zawarte w L). **Grupą Galois** tego rozszerzenia, ozn. G_K^L nazywamy zbiór wszystkich bijekcji $\sigma : L \to L$ takich, że

- $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,
- $\sigma(xy) = \sigma(x) \cdot \sigma(y)$,
- $\sigma(\lambda) = \lambda$, dla każdego $\lambda \in K$.

Nie ma tu miejsca, by opowiedzieć jak fundamentalnym obiektem w algebrze są grupy Galois. Ale polecam każdemu proste ćwiczenie.

Ćwiczenie

Grupa Galois rozszerzenia $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ składa się jedynie z identyczności i sprzężenia zespolonego.

Dla nas grupa ta jest istotna tylko po to, by powiedzieć w jakich przypadkach znaleźć można uogólnienie rozkładu Jordana-Chevalleya.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K, dla którego istnieje rozszerzenie L spełniające następujące warunki:

- L jest algebraicznie domknięte,
- jedyne elementy $x \in L$ takie, że $\sigma(x) = x$, dla każdego $\sigma \in G_K^L$ to elementy K.

Wówczas każdy endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ posiada jednoznaczny rozkład

$$\phi = \phi_S + \phi_N,$$

gdzie $\phi_S \in \mathrm{End}(V)$ jest półprosty, zaś $\phi_N \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny, przy czym $\phi_S \circ \phi_N = \phi_N \circ \phi_S$.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K, dla którego istnieje rozszerzenie L spełniające następujące warunki:

- L jest algebraicznie domknięte,
- jedyne elementy $x \in L$ takie, że $\sigma(x) = x$, dla każdego $\sigma \in G_K^L$ to elementy K.

Wówczas każdy endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ posiada jednoznaczny rozkład

$$\phi = \phi_S + \phi_N,$$

gdzie $\phi_S \in \mathrm{End}(V)$ jest półprosty, zaś $\phi_N \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny, przy czym $\phi_S \circ \phi_N = \phi_N \circ \phi_S$.

Ważną klasą ciał spełniającą warunki opisane wyżej są tzw. ciała doskonałe, np.:

- ciała $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, a ogólniej – wszystkie charakterystyki 0,
- każde ciało $\mathbb{Z}_p$,
- każde ciało algebraicznie domknięte.

- Endomorfizmy półproste są bardzo ważne i zachodzi następujące twierdzenie: endomorfizm ϕ przestrzeni skończenie wymiarowej jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny tego endomorfizmu nie ma wielokrotnych czynników nierozkładalnych. Nad ciałem algebraicznie domkniętym mamy zatem równoważność: półprostota $\phi \Leftrightarrow$ diagonalizowalność ϕ. Więcej: `kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/semisimple.pdf`.

- Endomorfizmy półproste są bardzo ważne i zachodzi następujące twierdzenie: endomorfizm ϕ przestrzeni skończenie wymiarowej jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny tego endomorfizmu nie ma wielokrotnych czynników nierozkładalnych. Nad ciałem algebraicznie domkniętym mamy zatem równoważność: półprostota $\phi \Leftrightarrow$ diagonalizowalność ϕ. Więcej: `kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/semisimple.pdf`.
- Ważnym motywem, który rozważaliśmy, było badanie podobieństwa macierzy przez rozważanie ich wyrazów w większym ciele. Ważną konstrukcją jest możliwie *ekonomiczne rozszerzenie* $\overline{V}$ przestrzeni liniowej V, by zamiast być nad K była *ona* nad pewnym rozszerzeniem $\overline{K}$. Dla $V = K^n$ bierzemy po prostu $\overline{K}^n$, a dla $V = M_n(K)$ rozważamy $\overline{V} = M_n(\overline{K})$. Ogólną konstrukcję poznamy przy okazji konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych.

- Endomorfizmy półproste są bardzo ważne i zachodzi następujące twierdzenie: endomorfizm ϕ przestrzeni skończenie wymiarowej jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian minimalny tego endomorfizmu nie ma wielokrotnych czynników nierozkładalnych. Nad ciałem algebraicznie domkniętym mamy zatem równoważność: półprostota $\phi \Leftrightarrow$ diagonalizowalność ϕ. Więcej: `kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/semisimple.pdf`.
- Ważnym motywem, który rozważaliśmy, było badanie podobieństwa macierzy przez rozważanie ich wyrazów w większym ciele. Ważną konstrukcją jest możliwie *ekonomiczne rozszerzenie* $\overline{V}$ przestrzeni liniowej V, by zamiast być nad K była *ona* nad pewnym rozszerzeniem $\overline{K}$. Dla $V = K^n$ bierzemy po prostu $\overline{K}^n$, a dla $V = M_n(K)$ rozważamy $\overline{V} = M_n(\overline{K})$. Ogólną konstrukcję poznamy przy okazji konstrukcji iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych.
- Naszym kolejnym celem będzie rozważanie rozmaitych wzbogaceń struktury skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V poprzez zadawanie na niej tak zwanych form dwuliniowych. Szczególnie ważną jest iloczyn skalarny.