Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 6, 18.03.2021 r.

Twierdzenie Jordana

Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem K. Jeżeli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest triangularyzowalny nad ciałem K to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V zwana **bazą Jordana**, w której macierz ϕ ma postać Jordana. W szczególności jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, wówczas każdy endomorfizm przestrzeni V jest w pewnej bazie w postaci Jordana.

Wniosek

Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ można sprowadzić nad K do postaci Jordana, to następujące warunki są równoważne:

- A jest podobna do B,
- dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy: $r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m$.

Twierdzenie Jordana

Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem K. Jeżeli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest triangularyzowalny nad ciałem K to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V zwana **bazą Jordana**, w której macierz ϕ ma postać Jordana. W szczególności jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, wówczas każdy endomorfizm przestrzeni V jest w pewnej bazie w postaci Jordana.

Wniosek

Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ można sprowadzić nad K do postaci Jordana, to następujące warunki są równoważne:

- A jest podobna do B,
- dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy: $r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m$.

Problem. Jak stwierdzać podobieństwo macierzy, które nie mają postaci Jordana?

Definicja

Przez **macierz wielomianową rozmiaru** $m \times n$ **nad ciałem** K nazywamy macierz o m wierszach i n kolumnach, której wyrazami są wielomiany o współczynnikach w ciele K. Każdą taką macierz można zapisać w formie $P(\lambda) = (p_{ij})(\lambda)$, gdzie

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & \dots & p_{1n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(\lambda) & \dots & p_{mn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

lub grupując odpowiednio potęgi λ w postaci:

$$P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d,$$

gdzie $P_0, \ldots, P_d \in M_{m \times n}(K)$. Największe k takie, że $P_k \neq 0$, nazywamy **stopniem** macierzy wielomianowej $P(\lambda)$, ozn. $\deg P(\lambda)$. Zbiór wszystkich macierzy wielomianowych rozmiaru $m \times n$ nad K oznaczamy $M_{m \times n}(K[\lambda])$.

Uwagi.

- Zbiór $M_n(K[\lambda])$ traktować można jako podzbiór $M_n(K(\lambda))$, gdzie $K(\lambda)$ jest ciałem funkcji wymiernych, czyli zbiorem elementów postaci
$$\frac{f}{g},\ \text{gdzie } f, g \in K[\lambda], g \neq 0.$$
Stąd mają sens definicje wprowadzone dla macierzy nad ciałem: dodawanie i mnożenie macierzy, operacje elementarne (i ich macierze), postaci: schodkowa i zredukowana, rząd, wyznacznik (dla elementów $M_n(K[\lambda])$ będący wielomianem!), macierz odwrotna, macierz dołączona.

Uwagi.

- Zbiór $M_n(K[\lambda])$ traktować można jako podzbiór $M_n(K(\lambda))$, gdzie $K(\lambda)$ jest ciałem funkcji wymiernych, czyli zbiorem elementów postaci
$$\frac{f}{g}, \text{ gdzie } f, g \in K[\lambda], g \neq 0.$$
Stąd mają sens definicje wprowadzone dla macierzy nad ciałem: dodawanie i mnożenie macierzy, operacje elementarne (i ich macierze), postaci: schodkowa i zredukowana, rząd, wyznacznik (dla elementów $M_n(K[\lambda])$ będący wielomianem!), macierz odwrotna, macierz dołączona.

- Nie każda macierz wielomianowa $P(\lambda)$ ma element odwrotny, to znaczy taki $Q(\lambda)$, że $P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) = 1$. Jeśli bowiem $\det P(\lambda) \neq 0$, to
$$P(\lambda)^{-1} = \frac{Adj(P(\lambda))}{\det P(\lambda)} \in M_n(K(\lambda)),$$
skąd łatwo wynika, że $P(\lambda)^{-1} \in M_n(K[\lambda]) \Leftrightarrow \det P(\lambda) \in K \setminus \{0\}$.

Twierdzenie (Frobenius 1878)

Niech K będzie ciałem oraz niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne.

- Macierze A, B są podobne nad K.
- Istnieją odwracalne macierze wielomianowe $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że

$$\lambda I - B = P(\lambda)^{-1} \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda).$$

Twierdzenie (Frobenius 1878)

Niech K będzie ciałem oraz niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne.

- Macierze A, B są podobne nad K.
- Istnieją odwracalne macierze wielomianowe $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że

$$\lambda I - B = P(\lambda)^{-1} \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda).$$

Ogólna filozofia

Macierz A jest podobna do macierzy B nad K wtedy i tylko wtedy, gdy macierz wielomianową $\lambda I - A$ można sprowadzić przy pomocy elementarnych operacji wierszowych i kolumnowych *ograniczonych do $M_n(K[\lambda])$* do $\lambda I - B$.

Inaczej mówiąc: podobieństwo macierzy A i B nad ciałem K jest tym samym, co równoważność (def: ćwiczenia) macierzy wielomianowych $\lambda I - A$, $\lambda I - B$ nad $K[\lambda]$.

Definicja pomocnicza

Rozważmy macierz wielomianową $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d$, gdzie $P_i \in M_n(K)$. Dla każdej $A \in M_{n \times n}(K)$ definiujemy wówczas:

$$P(A) = P_0 + AP_1 + \ldots + A^d P_d$$

i nazywamy **lewostronną wartością** $P(\lambda)$ dla $\lambda = A$.

Definicja pomocnicza

Rozważmy macierz wielomianową $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d$, gdzie $P_i \in M_n(K)$. Dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ definiujemy wówczas:

$$P(A) = P_0 + AP_1 + \ldots + A^d P_d$$

i nazywamy **lewostronną wartością** $P(\lambda)$ dla $\lambda = A$.

Uwaga. Strona ma znaczenie!

Zachodzi równość $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$, ale zwykle $(PQ)(A) \neq P(A)Q(A)$.

Definicja pomocnicza

Rozważmy macierz wielomianową $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d$, gdzie $P_i \in M_n(K)$. Dla każdej $A \in M_{n\times n}(K)$ definiujemy wówczas:

$$P(A) = P_0 + AP_1 + \ldots + A^d P_d$$

i nazywamy **lewostronną wartością** $P(\lambda)$ dla $\lambda = A$.

Lemat 1 - uogólnienie tw. Bezout

Niech $P(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ oraz niech $A \in M_n(K)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $P(A) = 0$,
- istnieje $F(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ taki, że $P(\lambda) = (\lambda I - A)F(\lambda)$.

Dowód Lematu 1.

- Niech $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d$, dla pewnych $P_i \in M_n(K[\lambda])$. Jeśli $P(A) = 0$, to

$$\begin{aligned}
P(\lambda) =& P(\lambda) - P(A) = \\
=& (P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d) - (P_0 + AP_1 + \ldots + A^d P_d) = \\
=& (\lambda I - A)P_1 + (\lambda^2 I - A^2)P_2 + \ldots + (\lambda^d I - A^d)P_k = \\
=& (\lambda I - A)(...)
\end{aligned}$$

Dowód Lematu 1.

- Niech $P(\lambda) = P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d$, dla pewnych $P_i \in M_n(K[\lambda])$. Jeśli $P(A) = 0$, to

$$\begin{aligned} P(\lambda) =& P(\lambda) - P(A) = \\ =& (P_0 + \lambda P_1 + \ldots + \lambda^d P_d) - (P_0 + AP_1 + \ldots + A^d P_d) = \\ =& (\lambda I - A)P_1 + (\lambda^2 I - A^2)P_2 + \ldots + (\lambda^d I - A^d)P_k = \\ =& (\lambda I - A)(...) \end{aligned}$$

- Jeśli zaś $P(\lambda) = (\lambda I - A)F(\lambda)$, gdzie $F(\lambda) = F_0 + \lambda F_1 + \ldots + \lambda^s F_s$, to:

$$P(\lambda) = \lambda F_0 + \lambda^2 F_1 + \ldots + \lambda^{s+1} F_s - AF_0 - \lambda AF_1 - \ldots - \lambda^s AF_s,$$

czyli

$$P(A) = AF_0 + A^2 F_1 + \ldots + A^{s+1} F_s - AF_0 - A^2 F_1 + \ldots - A^s AF_s = 0.$$

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.
- Równoważnie: $P(\lambda)(\lambda I - B) = \lambda P(\lambda) - P(\lambda)B = (\lambda I - A)Q(\lambda)$, czyli z Lematu 1 mamy $AP(A) - P(A)B = 0$, równoważnie: $AP(A) = P(A)B$.

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.
- Równoważnie: $P(\lambda)(\lambda I - B) = \lambda P(\lambda) - P(\lambda)B = (\lambda I - A)Q(\lambda)$, czyli z Lematu 1 mamy $AP(A) - P(A)B = 0$, równoważnie: $AP(A) = P(A)B$.
- Wystarczy więc pokazać, że $P(A)$ jest macierzą odwracalną. Wiadomo, że istnieje $R(\lambda)$, że $P(\lambda)R(\lambda) = 1$. Pokażemy, że $P(A)R(B) = 1$.

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.
- Równoważnie: $P(\lambda)(\lambda I - B) = \lambda P(\lambda) - P(\lambda)B = (\lambda I - A)Q(\lambda)$, czyli z Lematu 1 mamy $AP(A) - P(A)B = 0$, równoważnie: $AP(A) = P(A)B$.
- Wystarczy więc pokazać, że $P(A)$ jest macierzą odwracalną. Wiadomo, że istnieje $R(\lambda)$, że $P(\lambda)R(\lambda) = 1$. Pokażemy, że $P(A)R(B) = 1$.
- Zgodnie z dowodem Lematu 1 istnieje $G(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ taka, że $R(\lambda) - R(B) = (\lambda I - B)G(\lambda)$.

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.
- Równoważnie: $P(\lambda)(\lambda I - B) = \lambda P(\lambda) - P(\lambda)B = (\lambda I - A)Q(\lambda)$, czyli z Lematu 1 mamy $AP(A) - P(A)B = 0$, równoważnie: $AP(A) = P(A)B$.
- Wystarczy więc pokazać, że $P(A)$ jest macierzą odwracalną. Wiadomo, że istnieje $R(\lambda)$, że $P(\lambda)R(\lambda) = 1$. Pokażemy, że $P(A)R(B) = 1$.
- Zgodnie z dowodem Lematu 1 istnieje $G(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ taka, że $R(\lambda) - R(B) = (\lambda I - B)G(\lambda)$. Stąd

$$1 - P(\lambda)R(B) = P(\lambda)R(\lambda) - P(\lambda)R(B) = P(\lambda)(R(\lambda) - R(B)) =$$
$$= P(\lambda)(\lambda I - B)G(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda)G(\lambda).$$

Dowód Twierdzenia Frobeniusa.

- Jedna implikacja jest trywialna. Jeśli $B = T^{-1}AT$, gdzie $T \in M_n(K)$ jest odwracalna, to $\lambda I - B = T^{-1}(\lambda I - A)T$, czyli można położyć $P(\lambda) = Q(\lambda) = T$.
- Załóżmy, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1}(\lambda I - A)Q(\lambda)$, dla pewnych odwracalnych macierzy wielomianowych $P(\lambda), Q(\lambda)$.
- Równoważnie: $P(\lambda)(\lambda I - B) = \lambda P(\lambda) - P(\lambda)B = (\lambda I - A)Q(\lambda)$, czyli z Lematu 1 mamy $AP(A) - P(A)B = 0$, równoważnie: $AP(A) = P(A)B$.
- Wystarczy więc pokazać, że $P(A)$ jest macierzą odwracalną. Wiadomo, że istnieje $R(\lambda)$, że $P(\lambda)R(\lambda) = 1$. Pokażemy, że $P(A)R(B) = 1$.
- Zgodnie z dowodem Lematu 1 istnieje $G(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ taka, że $R(\lambda) - R(B) = (\lambda I - B)G(\lambda)$. Stąd
$$1 - P(\lambda)R(B) = P(\lambda)R(\lambda) - P(\lambda)R(B) = P(\lambda)(R(\lambda) - R(B)) =$$
$$= P(\lambda)(\lambda I - B)G(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda)G(\lambda).$$
- Wstawiając $\lambda = A$ mamy z Lematu 1 równość $I = P(A)R(B)$, koniec.

Twierdzenie - ładne ćwiczenie, które można przetłumaczyć też dla $M_{m\times n}(\mathbb{Z})$

Niech $0 \neq A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Wówczas za pomocą operacji elementarnych[a]. zamiany wierszy (kolumn) oraz dodania do wiersza (kolumny) wielokrotności (przez wielomian!) innego wiersza (innej kolumny) można przeprowadzić $A(\lambda)$:

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_r(\lambda) & \\ & & & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

gdzie $c_i(\lambda) \in K[\lambda]$ są niezerowe oraz $c_i(\lambda)$ dzieli $c_{i+1}(\lambda)$.

Inaczej: istnieją odwracalne $P(\lambda) \in M_m(K[\lambda])$, $Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$, że $C(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$.

[a] Ogólnie nie chcemy mnożenia wiersza/kolumny przez niezerowy wielomian niestały, bo macierz takiej operacji elementarnej ma macierz odwrotną, która nie jest wielomianowa.

Naszym celem jest pokazanie, że wielomiany $c_i(\lambda)$ występujące w $(*)$ są, z dokładnością do współczynnika wiodącego, jednoznacznie wyznaczone.

Naszym celem jest pokazanie, że wielomiany $c_i(\lambda)$ występujące w $(*)$ są, z dokładnością do współczynnika wiodącego, jednoznacznie wyznaczone.

Definicja, która przyda się i teraz, i kiedyś (i zawsze)

Dla macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz dla każdego $k \leq \min(m, n)$

- przez $A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$ oznaczamy macierz powstałą z A przez wykreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn o indeksach różnych odpowiednio od i_s oraz j_l,
- **minorami stopnia** k nazywamy wyznaczniki macierzy $A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$.

Naszym celem jest pokazanie, że wielomiany $c_i(\lambda)$ występujące w $(*)$ są, z dokładnością do współczynnika wiodącego, jednoznacznie wyznaczone.

Definicja, która przyda się i teraz, i kiedyś (i zawsze)

Dla macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ oraz dla każdego $k \leq \min(m, n)$

- przez $A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$ oznaczamy macierz powstałą z A przez wykreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn o indeksach różnych odpowiednio od i_s oraz j_l,
- **minorami stopnia** k nazywamy wyznaczniki macierzy $A^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$.

Definicja

Niech $A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Dla $1 \leq j \leq \min(m.n)$ przez $d_j(A(\lambda))$ określamy

- moniczny NWD wszystkich minorów stopnia j macierzy $A(\lambda)$, jeśli istnieje,
- 0, jeśli wszystkie minory stopnia j są zerowe.

Wielomiany $d_j(A(\lambda))$ nazywamy **dzielnikami wyznacznikowymi** $A(\lambda)$.

Twierdzenie (o postaci kanonicznej Smitha macierzy wielomianowej)

Niech $0 \neq A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$ oraz niech istnieją odwracalne $P(\lambda) \in M_m(K[\lambda])$, $Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że $P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$ ma postać:

$$P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_r(\lambda) & \\ & & & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

gdzie $c_i(\lambda) \in K[\lambda]$ są moniczne, niezerowe oraz $c_i(\lambda)$ dzieli $c_{i+1}(\lambda)$. Wówczas kładąc $d_0(A(\lambda)) = 1$ mamy, dla $1 \leq i \leq r$:

$$c_i(\lambda) = \frac{d_i(A(\lambda))}{d_{i-1}(A(\lambda))}.$$

Wielomiany c_i nazywamy wówczas **czynnikami niezmienniczymi** $A(\lambda)$.

Kluczowa idea. Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ oraz macierzy $\lambda I - A$:

- $d_n(\lambda I - A) = (-1)^n w_A(\lambda)$,
- a zatem z twierdzenia Smitha wynika, że $w_A(\lambda)$ jest co do znaku iloczynem czynników niezmienniczych macierzy wielomianowej $\lambda I - A$.

Kluczowa idea. Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ oraz macierzy $\lambda I - A$:

- $d_n(\lambda I - A) = (-1)^n w_A(\lambda)$,
- a zatem z twierdzenia Smitha wynika, że $w_A(\lambda)$ jest co do znaku iloczynem czynników niezmienniczych macierzy wielomianowej $\lambda I - A$.

Istotą formy kanonicznej wymiernej będzie zauważenie, że dowolna macierz X, dla której niestałe czynniki niezmiennicze macierzy wielomianowej $\lambda I - X$ to $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ jest podobna do macierzy blokowo diagonalnej

$$C = \begin{bmatrix} C(f_1(\lambda)) & & \\ & \ddots & \\ & & C(f_r(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

Kluczowa idea. Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ oraz macierzy $\lambda I - A$:

- $d_n(\lambda I - A) = (-1)^n w_A(\lambda)$,
- a zatem z twierdzenia Smitha wynika, że $w_A(\lambda)$ jest co do znaku iloczynem czynników niezmienniczych macierzy wielomianowej $\lambda I - A$.

Istotą formy kanonicznej wymiernej będzie zauważenie, że dowolna macierz X, dla której niestałe czynniki niezmiennicze macierzy wielomianowej $\lambda I - X$ to $f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ jest podobna do macierzy blokowo diagonalnej

$$C = \begin{bmatrix} C(f_1(\lambda)) & & \\ & \ddots & \\ & & C(f_r(\lambda)) \end{bmatrix}.$$

Problem na marginesie. Jak sformułować postać kanoniczną Smitha dla macierzy z $M_n(\mathbb{Z})$? Co ona oznacza? Do czego się przydaje?

Lemat 2

Niech $A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Wówczas:

(a) Jeśli $P(\lambda) \in M_{l\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times p}(K[\lambda])$, i jeśli $j \leq \min(m, n)$, to $d_j(A(\lambda))$ jest dzielnikiem $d_j(P(\lambda)A(\lambda))$ oraz $d_j(A(\lambda)Q(\lambda))$.

(b) Jeśli $P(\lambda) \in M_{m\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ są odwracalne oraz $B(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$, to dla wszystkich j mamy:

$$d_j(B(\lambda)) = d_j(A(\lambda)).$$

Lemat 2

Niech $A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Wówczas:

(a) Jeśli $P(\lambda) \in M_{l\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times p}(K[\lambda])$, i jeśli $j \leq \min(m, n)$, to $d_j(A(\lambda))$ jest dzielnikiem $d_j(P(\lambda)A(\lambda))$ oraz $d_j(A(\lambda)Q(\lambda))$.

(b) Jeśli $P(\lambda) \in M_{m\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ są odwracalne oraz $B(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$, to dla wszystkich j mamy:

$$d_j(B(\lambda)) = d_j(A(\lambda)).$$

Dowód wymaga następującego ważnego wyniku.

Twierdzenie (Cauchy-Binet)

Jeśli $A \in M_{l\times m}(K)$, $B \in M_{m\times n}(K)$ oraz $r \leq \min(l, m, n)$, to

$$\det(AB)^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r} = \sum_{1\leq k_1<\dots<k_r\leq m} \left(\det A^{i_1,\dots,i_r}_{k_1,\dots,k_r}\right)\left(\det B^{k_1,\dots,k_r}_{j_1,\dots,j_r}\right).$$

Idea dowodu tw. Cauchy'ego-Bineta.

- Wystarczy pokazać, że jeśli $A \in M_{n\times N}(K)$ oraz $B \in M_{N\times n}(K)$ oraz jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną n elementowych podzbiorów $\{1, \ldots, n\}$ to
$$\det(AB) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s,$$
gdzie A_S powstaje z A przez usunięcie kolumn o indeksach spoza S, oraz B_S powstaje przez usunięcie wierszy o indeksach spoza S.

Idea dowodu tw. Cauchy'ego-Bineta.

- Wystarczy pokazać, że jeśli $A \in M_{n\times N}(K)$ oraz $B \in M_{N\times n}(K)$ oraz jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną n elementowych podzbiorów $\{1,\ldots,n\}$ to
$$\det(AB) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s,$$
gdzie A_S powstaje z A przez usunięcie kolumn o indeksach spoza S, oraz B_S powstaje przez usunięcie wierszy o indeksach spoza S.
- Niech $A_1,\ldots A_n$ będą wierszami A oraz $B_1,\ldots,B_n$ będą kolumnami B, traktowanymi jako wektory w K^N.

Idea dowodu tw. Cauchy'ego-Bineta.

- Wystarczy pokazać, że jeśli $A \in M_{n\times N}(K)$ oraz $B \in M_{N\times n}(K)$ oraz jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną n elementowych podzbiorów $\{1,\ldots,n\}$ to
$$\det(AB) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s,$$
gdzie A_S powstaje z A przez usunięcie kolumn o indeksach spoza S, oraz B_S powstaje przez usunięcie wierszy o indeksach spoza S.
- Niech $A_1,\ldots A_n$ będą wierszami A oraz $B_1,\ldots,B_n$ będą kolumnami B, traktowanymi jako wektory w K^N.
- Rozważamy funkcje $f(A,B) = \det(AB) = f(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n)$ oraz $g(A,B) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s = g(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n)$.

Idea dowodu tw. Cauchy'ego-Bineta.

- Wystarczy pokazać, że jeśli $A \in M_{n\times N}(K)$ oraz $B \in M_{N\times n}(K)$ oraz jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną n elementowych podzbiorów $\{1, \dots, n\}$ to
$$\det(AB) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s,$$
gdzie A_S powstaje z A przez usunięcie kolumn o indeksach spoza S, oraz B_S powstaje przez usunięcie wierszy o indeksach spoza S.
- Niech $A_1, \dots A_n$ będą wierszami A oraz $B_1, \dots, B_n$ będą kolumnami B, traktowanymi jako wektory w K^N.
- Rozważamy funkcje $f(A, B) = \det(AB) = f(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n)$ oraz $g(A, B) = \sum_{S\in\mathcal{S}} \det A_s \det B_s = g(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n)$.
- Funkcje f, g są jednorodne i addytywne względem każdej współrzędnej (sprawdzamy to z własności wyznacznika). Aby pokazać, że są identyczne wystarczy zatem rozważać przypadek, gdy A_i, B_j są wektorami bazy standardowej. I dalej działamy jak w dowodzie wzoru permutacyjnego.

Lemat 2

Niech $A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Wówczas:

(a) Jeśli $P(\lambda) \in M_{l\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times p}(K[\lambda])$, i jeśli $j \leq \min(m, n)$, to $d_j(A(\lambda))$ jest dzielnikiem $d_j(P(\lambda)A(\lambda))$ oraz $d_j(A(\lambda)Q(\lambda))$.

(b) Jeśli $P(\lambda) \in M_{m\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ są odwracalne oraz $B(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$, to dla wszystkich j mamy:

$$d_j(B(\lambda)) = d_j(A(\lambda)).$$

Dowód (a). Skoro każdy minor d stopnia j macierzy $P(\lambda)A(\lambda)$ jest sumą iloczynów $f(P(\lambda))g(A(\lambda))$ odpowiednich minorów stopnia j macierzy $P(\lambda)$ oraz $A(\lambda)$, to skoro każdy $g(A(\lambda)$ jest podzielny przez $d_j(A(\lambda)$, to również d jest podzielny przez $d_j(A(\lambda))$. Zatem $d_j(P(\lambda)A(\lambda))$ jako NWD wszystkich takich d również jest podzielny przez $d_j(A(\lambda))$. Analogicznie pokazujemy, że $d_j(A(\lambda)Q(\lambda))$ dzieli się przez $d_j(A(\lambda))$.

Lemat 2

Niech $A(\lambda) \in M_{m\times n}(K[\lambda])$. Wówczas:

(a) Jeśli $P(\lambda) \in M_{l\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times p}(K[\lambda])$, i jeśli $j \leq \min(m, n)$, to $d_j(A(\lambda))$ jest dzielnikiem $d_j(P(\lambda)A(\lambda))$ oraz $d_j(A(\lambda)Q(\lambda))$.

(b) Jeśli $P(\lambda) \in M_{m\times m}(K[\lambda])$ oraz $Q(\lambda) \in M_{n\times n}(K[\lambda])$ są odwracalne oraz $B(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda)$, to dla wszystkich j mamy:

$$d_j(B(\lambda)) = d_j(A(\lambda)).$$

Dowód (b). Z (a) widzimy, że

- $d_j(A(\lambda))$ to dzielnik $d_j(P^{-1}(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)) = d_j(B(\lambda))$,
- $d_j(B(\lambda))$ to dzielnik $d_j(P(\lambda)B(\lambda)Q^{-1}(\lambda)) = d_j(A(\lambda))$.

Zatem $d_j(A(\lambda))$, $d_j(B(\lambda))$ dzielą się wzajemnie. Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu w $K[\lambda]$ wynika stąd, że różnią się one co najwyżej o skalar. Ale dzielniki wyznacznikowe są moniczne, więc dostajemy (b).

Dowód twierdzenia o postaci Smitha macierzy wielomianowej.

Dowód twierdzenia o postaci Smitha macierzy wielomianowej.

- Mamy $d_j(A(\lambda)) = d_j(P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda))$, dla wszystkich j.

Dowód twierdzenia o postaci Smitha macierzy wielomianowej.

- Mamy $d_j(A(\lambda)) = d_j(P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda))$, dla wszystkich j.
- Patrząc na postać:

$$C(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_r(\lambda) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

bez trudu widać, że:

$$d_j(C(\lambda)) = \begin{cases} c_1(\lambda)\dots c_j(\lambda), & \text{jeśli } j \leq r, \\ 0, & \text{jeśli } j > r. \end{cases}.$$

Dowód twierdzenia o postaci Smitha macierzy wielomianowej.

- Mamy $d_j(A(\lambda)) = d_j(P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda))$, dla wszystkich j.
- Patrząc na postać:

$$C(\lambda) = P(\lambda)^{-1}A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{bmatrix} c_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_r(\lambda) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

bez trudu widać, że:

$$d_j(C(\lambda)) = \begin{cases} c_1(\lambda)\dots c_j(\lambda), & \text{jeśli } j \leq r, \\ 0, & \text{jeśli } j > r. \end{cases}.$$

- Stąd $c_1(\lambda) = d_1(A(\lambda))$ oraz $c_{j+1}(\lambda) = d_{j+1}(A(\lambda))/d_j(A(\lambda))$, dla $1 \leq j \leq r-1$.

Wniosek (rozwinięcie twierdzenia Frobeniusa)

Niech K będzie ciałem oraz niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne.

- Macierze A, B są podobne nad K.
- Istnieją odwracalne macierze wielomianowe $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1} \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)$.
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne dzielniki wyznacznikowe,
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne czynniki niezmiennicze.

Wniosek (rozwinięcie twierdzenia Frobeniusa)

Niech K będzie ciałem oraz niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne.

- Macierze A, B są podobne nad K.
- Istnieją odwracalne macierze wielomianowe $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1} \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)$.
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne dzielniki wyznacznikowe,
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne czynniki niezmiennicze.

Przykładowy wniosek

Jeśli $A \in M_n(K)$, to A jest podobna do A^T.

Dowód: $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - A^T$ mają identyczne czynniki niezmiennicze/dzielniki wyznacznikowe.

Wniosek (rozwinięcie twierdzenia Frobeniusa)

Niech K będzie ciałem oraz niech $A, B \in M_n(K)$. Następujące warunki są równoważne.

- Macierze A, B są podobne nad K.
- Istnieją odwracalne macierze wielomianowe $P(\lambda), Q(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ takie, że $\lambda I - B = P(\lambda)^{-1} \cdot (\lambda I - A) \cdot Q(\lambda)$.
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne dzielniki wyznacznikowe,
- $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ mają identyczne czynniki niezmiennicze.

Fundamentalny wniosek

Jeśli $K \subseteq L$ są ciałami oraz $A, B \in M_n(K)$, to jeśli A, B są podobne nad L, to są podobne nad K.

Idea: moniczny $\mathrm{NWD}(p_1, \ldots, p_m)$ w $L[\lambda]$ jest równy monicznemu $\mathrm{NWD}(p_1, \ldots, p_m)$ w $K[\lambda]$. Stąd dzielniki wyznacznikowe $\lambda I - A$ oraz $\lambda I - B$ nad K i L są takie same.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.
- Z poprzedniego punktu mamy $C = C_1 e_1 + \ldots + C_r e_r$, gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z F (nad K).

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.
- Z poprzedniego punktu mamy $C = C_1 e_1 + \ldots + C_r e_r$, gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z F (nad K).
- Rozważmy wielomian r zmiennych (definicja indukcyjna, intuicyjna) postaci $P(t_1, \ldots, t_r) = \det(t_1 C_1 + \ldots + t_r C_r) \in K[t_1, \ldots, t_r]$.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.
- Z poprzedniego punktu mamy $C = C_1 e_1 + \ldots + C_r e_r$, gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z F (nad K).
- Rozważmy wielomian r zmiennych (definicja indukcyjna, intuicyjna) postaci $P(t_1, \ldots, t_r) = \det(t_1 C_1 + \ldots + t_r C_r) \in K[t_1, \ldots, t_r]$.
- Skoro $\det C \neq 0$, to $P(e_1, \ldots, e_r) \neq 0$, a więc $P \neq 0$.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.
- Z poprzedniego punktu mamy $C = C_1 e_1 + \ldots + C_r e_r$, gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z F (nad K).
- Rozważmy wielomian r zmiennych (definicja indukcyjna, intuicyjna) postaci $P(t_1, \ldots, t_r) = \det(t_1 C_1 + \ldots + t_r C_r) \in K[t_1, \ldots, t_r]$.
- Skoro $\det C \neq 0$, to $P(e_1, \ldots, e_r) \neq 0$, a więc $P \neq 0$.
- Skoro K jest nieskończone (!), to istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, że $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq 0$.

Uwaga. Cała trudność wniosku jest wtedy, gdy K **jest ciałem skończonym**. W przeciwnym przypadku dowód jest następujący (brak tu kilku wyjaśnień, ale niezbyt trudno je uzupełnić, a całość jest bardzo pouczająca i uniwersalna).

- Niech $K \subseteq L$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą podobne nad L. Zatem istnieje macierz odwracalna $C \in M_n(L)$, że $B = C^{-1}AC$.
- Inaczej mówiąc $CB - AC = 0$, czyli wyrazy C są rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych o współczynnikach w K. A zatem przestrzeń F rozpięta przez wyrazy C jest skończenie wymiarowa nad K.
- Z poprzedniego punktu mamy $C = C_1 e_1 + \ldots + C_r e_r$, gdzie $C_i \in M_n(K)$ oraz $\{e_i\}$ – liniowo niezależny układ wektorów z F (nad K).
- Rozważmy wielomian r zmiennych (definicja indukcyjna, intuicyjna) postaci $P(t_1, \ldots, t_r) = \det(t_1 C_1 + \ldots + t_r C_r) \in K[t_1, \ldots, t_r]$.
- Skoro $\det C \neq 0$, to $P(e_1, \ldots, e_r) \neq 0$, a więc $P \neq 0$.
- Skoro K jest nieskończone (!), to istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, że $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq 0$.
- Zatem $D = \lambda_1 C_1 + \ldots \lambda_r C_r \in M_n(K)$ jest odwracalna i łatwo widzieć, że
$$B = D^{-1}AD.$$

Naszym celem będzie teraz naszkicowanie konstrukcji formy kanonicznej Frobeniusa dla macierzy nad dowolnym ciałem (rational canonical form).

Naszym celem będzie teraz naszkicowanie konstrukcji formy kanonicznej Frobeniusa dla macierzy nad dowolnym ciałem (rational canonical form).

Przypomnienie-definicja

Dla dowolnego wielomianu $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ macierz postaci:

$$C(f(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

nazywana jest macierzą towarzyszącą $f(\lambda)$. Dla $f(\lambda) = \lambda - a$ kładziemy $C(f(\lambda)) = a$.

Naszym celem będzie teraz naszkicowanie konstrukcji formy kanonicznej Frobeniusa dla macierzy nad dowolnym ciałem (rational canonical form).

Uwaga odnośnie notacji. Macierz blokowo diagonalną o klatkach $A_1, \dots, A_r$ zapisujemy jako

$$\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_r).$$

Dla macierzy wielomianowej $A(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ o postaci równoważnej mającej na przekątnej wielomiany $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda) \in K[\lambda]$ będziemy pisać pokrótce:

$$A(\lambda) \sim \mathrm{diag}(p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)).$$

Naszym celem będzie teraz naszkicowanie konstrukcji formy kanonicznej Frobeniusa dla macierzy nad dowolnym ciałem (rational canonical form).

Uwaga odnośnie notacji. Macierz blokowo diagonalną o klatkach $A_1, \dots, A_r$ zapisujemy jako

$$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r).$$

Dla macierzy wielomianowej $A(\lambda) \in M_n(K[\lambda])$ o postaci równoważnej mającej na przekątnej wielomiany $p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda) \in K[\lambda]$ będziemy pisać pokrótce:

$$A(\lambda) \sim \operatorname{diag}(p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)).$$

Ćwiczenie

Dla dowolnego wielomianu $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ mamy

$$\lambda I - C(f(\lambda)) \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, f(\lambda))$$

Wniosek

Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ takiej, że

$$\lambda I - A \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda))$$

oraz macierzy blokowo diagonalnej C postaci:

$$C = \operatorname{diag}(C(f_1(\lambda)), \ldots, C(f_r(\lambda)))$$

mamy

$$\lambda I - C \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)).$$

Na mocy wcześniejszego twierdzenia macierze A oraz C są podobne nad K.

Dowód:

- Zauważmy, że:
$$\lambda I - C = \operatorname{diag}(\lambda I - C(f_1(\lambda)), \ldots, \lambda I - C(f_r(\lambda))).$$

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(f_1(\lambda)), \ldots, \lambda I - C(f_r(\lambda))).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, f_1(\lambda)), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, f_r(\lambda))).$$

Dowód:

- Zauważmy, że:
$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(f_1(\lambda)), \ldots, \lambda I - C(f_r(\lambda))).$$
- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:
$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, f_1(\lambda)), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, f_r(\lambda))).$$
- To oczywiście oznacza, że porządkując inaczej diagonalę po prawej mamy:
$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)).$$

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \operatorname{diag}(\lambda I - C(f_1(\lambda)), \ldots, \lambda I - C(f_r(\lambda))).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \operatorname{diag}(\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, f_1(\lambda)), \ldots, \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, f_r(\lambda))).$$

- To oczywiście oznacza, że porządkując inaczej diagonalę po prawej mamy:

$$\lambda I - C \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)).$$

- Zatem macierze wielomianowe $\lambda I - C$ oraz $\lambda I - A$ są równoważne.

Wniosek

Każda macierz $A \in M_n(K)$ jest podobna do macierzy postaci

$$\mathrm{diag}(C_1(f_1(\lambda)), \ldots, C(f_r(\lambda)))),$$

gdzie $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$ są czynnikami niezmienniczymi $\lambda I - A$.

Wniosek

Każda macierz $A \in M_n(K)$ jest podobna do macierzy postaci

$$\operatorname{diag}(C_1(f_1(\lambda)), \ldots, C(f_r(\lambda)))),$$

gdzie $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$ są czynnikami niezmienniczymi $\lambda I - A$.

Twierdzenie

Niech

$$f(\lambda) = p_1(\lambda)^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r(\lambda)^{e_r} \in K[\lambda]$$

będzie (jednoznacznym) rozkładem $f(\lambda)$ na czynniki nierozkładalne, przy czym $p_1, \ldots, p_r$ są moniczne i parami różne. Wówczas podobne nad K są macierze:

- $C(f(\lambda))$,
- $C = \operatorname{diag}(C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, C(p_r(\lambda)^{e_r}))$.

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \operatorname{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_r(\lambda)^{e_r})).$$

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_r(\lambda)^{e_r})).$$

- Liczymy dzielniki wyznacznikowe $\lambda I - C$. Ostatni dzielnik, powiedzmy d_n to oczywiście $w_C(\lambda)$, czyli $f(\lambda)$.

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_r(\lambda)^{e_r})).$$

- Liczymy dzielniki wyznacznikowe $\lambda I - C$. Ostatni dzielnik, powiedzmy d_n to oczywiście $w_C(\lambda)$, czyli $f(\lambda)$.
- Dzielnik wyznacznikowy $d_{n-1}(\lambda I - C)$ to NWD względnie pierwszych wielomianów $f(\lambda)/p_i(\lambda)^{e_i}$, czyli 1.

Dowód:

- Zauważmy, że:

$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \dots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$

- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:

$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \dots, 1, p_1(\lambda)^{e_1}), \dots, \mathrm{diag}(1, \dots, 1, p_r(\lambda)^{e_r})).$$

- Liczymy dzielniki wyznacznikowe $\lambda I - C$. Ostatni dzielnik, powiedzmy d_n to oczywiście $w_C(\lambda)$, czyli $f(\lambda)$.
- Dzielnik wyznacznikowy $d_{n-1}(\lambda I - C)$ to NWD względnie pierwszych wielomianów $f(\lambda)/p_i(\lambda)^{e_i}$, czyli 1.
- A zatem $\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, f(\lambda))$.

Dowód:

- Zauważmy, że:
$$\lambda I - C = \mathrm{diag}(\lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \lambda I - C(p_1(\lambda)^{e_1})).$$
- Z poprzedniego ćwiczenia sprowadzamy każdy blok $\lambda I - C(f_1(\lambda))$ do postaci Smitha, czyli:
$$\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_1(\lambda)^{e_1}), \ldots, \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p_r(\lambda)^{e_r})).$$
- Liczymy dzielniki wyznacznikowe $\lambda I - C$. Ostatni dzielnik, powiedzmy d_n to oczywiście $w_C(\lambda)$, czyli $f(\lambda)$.
- Dzielnik wyznacznikowy $d_{n-1}(\lambda I - C)$ to NWD względnie pierwszych wielomianów $f(\lambda)/p_i(\lambda)^{e_i}$, czyli 1.
- A zatem $\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, f(\lambda))$.
- Ale również $\lambda I - C(f(\lambda)) \sim \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, f(\lambda))$, co kończy dowód.

Definicja

Niech $A \in M_n(K)$ oraz niech czynniki niezmiennicze macierzy wielomianowej $\lambda I - A \in M_n(K[\lambda])$ będą postaci:

$$
\begin{aligned}
c_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{1t}} \\
&\vdots \\
c_r(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{r1}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{rt}},
\end{aligned}
$$

gdzie $p_s(\lambda)$ są parami różne, moniczne i nierozkładalne nad K, zaś e_{ij} to liczby całkowite nieujemne. Wielomiany $p_s(\lambda)^{e_{ij}}$, gdzie $e_{ij} \neq 0$, nazywane są **dzielnikami elementarnymi** macierzy A.

Definicja

Niech $A \in M_n(K)$ oraz niech czynniki niezmiennicze macierzy wielomianowej $\lambda I - A \in M_n(K[\lambda])$ będą postaci:

$$
\begin{aligned}
c_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{1t}} \\
&\vdots \\
c_r(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{r1}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{rt}},
\end{aligned}
$$

gdzie $p_s(\lambda)$ są parami różne, moniczne i nierozkładalne nad K, zaś e_{ij} to liczby całkowite nieujemne. Wielomiany $p_s(\lambda)^{e_{ij}}$, gdzie $e_{ij} \neq 0$, nazywane są **dzielnikami elementarnymi** macierzy A.

Wniosek

Macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dzielniki elementarne.

Definicja

Niech $A \in M_n(K)$ oraz niech czynniki niezmiennicze macierzy wielomianowej $\lambda I - A \in M_n(K[\lambda])$ będą postaci:

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{1t}} \\ &\vdots \\ c_r(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{r1}} \cdot \ldots \cdot p_t(\lambda)^{e_{rt}}, \end{aligned}$$

gdzie $p_s(\lambda)$ są parami różne, moniczne i nierozkładalne nad K, zaś e_{ij} to liczby całkowite nieujemne. Wielomiany $p_s(\lambda)^{e_{ij}}$, gdzie $e_{ij} \neq 0$, nazywane są **dzielnikami elementarnymi** macierzy A.

Wniosek - twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie cykliczne

Jeśli $d_1(\lambda), \ldots, d_s(\lambda) \in K[\lambda]$ są dzielnikami elementarnymi macierzy $A \in M_n(K)$, to A jest podobna nad K do macierzy $\mathrm{diag}(C(d_1(\lambda)), \ldots, C(d_r(\lambda))) \in M_n(K)$.

Uwaga. Postać dzielników elementarnych zależy od ciała K. Przykład: jeśli $A \in M_{12}(\mathbb{Q})$ ma czynniki niezmiennicze:

$$c_1(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1),$$
$$c_2(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 - 2)^2(\lambda - 1)$$

to dzielnikami elementarnymi A są:

$$\lambda^2 + 1, \quad \lambda - 1, \quad (\lambda^2 + 1)^2, \quad (\lambda^2 - 2)^2, \quad \lambda - 1.$$

A zatem A jest podobna nad $\mathbb{Q}$ do

$$\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 1 \right).$$

Uwaga. Postać dzielników elementarnych zależy od ciała K. Przykład: jeśli $A \in M_{12}(\mathbb{R})$ ma czynniki niezmiennicze:

$$c_1(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1),$$
$$c_2(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2(\lambda - \sqrt{2})^2(\lambda + \sqrt{2})^2(\lambda - 1)$$

to dzielnikami elementarnymi A są:

$$\lambda^2 + 1, \quad \lambda - 1, \quad (\lambda^2 + 1)^2, \quad (\lambda - \sqrt{2})^2, \quad (\lambda + \sqrt{2})^2, \quad \lambda - 1.$$

A zatem A jest podobna nad $\mathbb{R}$ do

$$\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}, 1 \right).$$

Uwaga. Postać dzielników elementarnych zależy od ciała K. Przykład: jeśli $A \in M_{12}(\mathbb{C})$ ma czynniki niezmiennicze:

$$c_1(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - 1),$$
$$c_2(\lambda) = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2(\lambda - \sqrt{2})^2(\lambda + \sqrt{2})^2(\lambda - 1)$$

to dzielnikami elementarnymi A są:

$$\lambda - i, \quad \lambda + i, \quad \lambda - 1, \quad (\lambda - i)^2, \quad (\lambda + i)^2, \quad (\lambda - \sqrt{2})^2, \quad (\lambda + \sqrt{2})^2, \quad \lambda - 1.$$

A zatem A jest podobna nad $\mathbb{C}$ do

$$\operatorname{diag}\left(-i, i, 1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}, 1\right).$$

Teraz przejdziemy do formy wymiernej, której szczególnym przypadkiem jest postać kanoniczna Jordana.

Teraz przejdziemy do formy wymiernej, której szczególnym przypadkiem jest postać kanoniczna Jordana.

Definicja

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m i niech $N = (n_{ij}) \in M_{m\times m}(K)$ będzie taka, że $n_{m1} = 1$, zaś pozostałe wyrazy są zerowe.

Przez **macierz hipertowarzyszącą wielomianu** $p(\lambda)^r$ rozumiemy macierz blokową $H(p(\lambda)^r) \in M_{mr}(K)$ postaci:

$$H(p(\lambda)^r) = \begin{bmatrix} C(p(\lambda))^T & N & & \dots & & 0 \\ 0 & C(p(\lambda))^T & N & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C(p(\lambda))^T & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p(\lambda))^T & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p(\lambda))^T \end{bmatrix}.$$

Przykłady: dla $w_1(\lambda) = (\lambda^2+1)^3$, $w_2(\lambda) = (\lambda^3+5\lambda^2-6)^2$, $w_3(\lambda) = (\lambda-3)^4$:

$$H(w_1(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(w_2(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$H(w_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Czyli macierz hipertowarzysząca $(\lambda - a)^m$ to klatka Jordana.

Przykłady: dla $w_1(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^3$, $w_2(\lambda) = (\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6)^2$, $w_3(\lambda) = (\lambda - 3)^4$:

$$H(w_1(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H(w_2(\lambda)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$H(w_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zabawna obserwacja

Jeśli $mr \neq 1$, to ponad diagonalą macierzy $H(p(\lambda)^r) \in M_{mr}(K)$ są same jedynki.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Dowód.

- Oczywiście $\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - C) = p(\lambda)^r$. Zatem dzielnik wyznacznikowy d_{rm} macierzy wielomianowych $\lambda I - H$ oraz $\lambda I - C$ jest identyczny.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Dowód.

- Oczywiście $\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - C) = p(\lambda)^r$. Zatem dzielnik wyznacznikowy d_{rm} macierzy wielomianowych $\lambda I - H$ oraz $\lambda I - C$ jest identyczny.
- Zauważmy, że jeśli z macierzy H usuniemy pierwszy wiersz i ostatnią kolumnę, to na mocy zabawnej obserwacji dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same jedynki. Zatem po usunięciu z $\lambda I - H$ pierwszego i ostatniego wiersza dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same -1, więc wyznacznik tego minora wynosi ± 1.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Dowód.

- Oczywiście $\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - C) = p(\lambda)^r$. Zatem dzielnik wyznacznikowy d_{rm} macierzy wielomianowych $\lambda I - H$ oraz $\lambda I - C$ jest identyczny.
- Zauważmy, że jeśli z macierzy H usuniemy pierwszy wiersz i ostatnią kolumnę, to na mocy zabawnej obserwacji dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same jedynki. Zatem po usunięciu z $\lambda I - H$ pierwszego i ostatniego wiersza dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same -1, więc wyznacznik tego minora wynosi ± 1.
- Stąd $d_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$. Zatem także $c_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Dowód.

- Oczywiście $\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - C) = p(\lambda)^r$. Zatem dzielnik wyznacznikowy d_{rm} macierzy wielomianowych $\lambda I - H$ oraz $\lambda I - C$ jest identyczny.
- Zauważmy, że jeśli z macierzy H usuniemy pierwszy wiersz i ostatnią kolumnę, to na mocy zabawnej obserwacji dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same jedynki. Zatem po usunięciu z $\lambda I - H$ pierwszego i ostatniego wiersza dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same -1, więc wyznacznik tego minora wynosi ± 1.
- Stąd $d_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$. Zatem także $c_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$.
- Zatem z twierdzenia o postaci Smitha mamy: $\lambda I - H \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p(\lambda)^r)$.

Fakt

Niech $p(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie moniczny stopnia m. Wówczas dla każdego $r \geq 1$ macierze $C = C(p(\lambda)^r)$ oraz $H = H(p(\lambda)^r)$ są podobne nad K.

Dowód.

- Oczywiście $\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - C) = p(\lambda)^r$. Zatem dzielnik wyznacznikowy d_{rm} macierzy wielomianowych $\lambda I - H$ oraz $\lambda I - C$ jest identyczny.
- Zauważmy, że jeśli z macierzy H usuniemy pierwszy wiersz i ostatnią kolumnę, to na mocy zabawnej obserwacji dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same jedynki. Zatem po usunięciu z $\lambda I - H$ pierwszego i ostatniego wiersza dostajemy macierz dolnotrójkątną mającą na przekątnej same -1, więc wyznacznik tego minora wynosi ± 1.
- Stąd $d_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$. Zatem także $c_{rm-1}(\lambda I - H) = 1$.
- Zatem z twierdzenia o postaci Smitha mamy: $\lambda I - H \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p(\lambda)^r)$.
- Wiemy jednak, że $\lambda I - C \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, p(\lambda)^r)$, więc H i C są podobne.

Wniosek - twierdzenie o formie kanonicznej wymiernej (Frobeniusa)

Jeśli $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ są dzielnikami elementarnymi macierzy $A \in M_n(K)$, to A jest podobna do macierzy:

$$\mathrm{diag}(H(d_1(\lambda)), \ldots, H(d_r(\lambda))).$$

Wniosek - twierdzenie o formie kanonicznej wymiernej (Frobeniusa)

Jeśli $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ są dzielnikami elementarnymi macierzy $A \in M_n(K)$, to A jest podobna do macierzy:

$$\operatorname{diag}(H(d_1(\lambda)), \ldots, H(d_r(\lambda))).$$

Wniosek - twierdzenie Jordana (drugi raz)

Jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to wszystkie elementarne dzielniki A są postaci $(\lambda - a)^r$, gdzie a to wartość własna A. Co więcej $H((\lambda - a)^r)$ jest klatką Jordana rozmiaru r. Zatem A jest podobna do pewnej macierzy w postaci Jordana.

Wniosek - twierdzenie o formie kanonicznej wymiernej (Frobeniusa)

Jeśli $d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ są dzielnikami elementarnymi macierzy $A \in M_n(K)$, to A jest podobna do macierzy:

$$\mathrm{diag}(H(d_1(\lambda)), \ldots, H(d_r(\lambda))).$$

Wniosek - twierdzenie Jordana (drugi raz)

Jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to wszystkie elementarne dzielniki A są postaci $(\lambda - a)^r$, gdzie a to wartość własna A. Co więcej $H((\lambda - a)^r)$ jest klatką Jordana rozmiaru r. Zatem A jest podobna do pewnej macierzy w postaci Jordana.

Uwaga. Nie wspominam już o szukaniu macierzy transformacji macierzy do jej formy wymiernej, choć takie algorytmy są oczywiście znane i opisane.