Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 5, 16.03.2021 r.

Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dla każdego $a \in K$ przez $V_{[a]}$ oznaczamy podprzestrzeń złożoną ze wszystkich $\alpha \in V$, dla których istnieje n takie, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(\alpha) = 0$. Przestrzeń $V_{[a]}$ nazywamy **podprzestrzenią pierwiastkową** endomorfizmu ϕ lub **uogólnioną podprzestrzenią własną**.

Twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Endomorfizm ϕ jest triangularyzowalny wtedy i tylko wtedy, gdy V jest sumą prostą podprzestrzeni pierwiastkowych endomorfizmu ϕ.

Uwaga (sprowadzenie problemu do przypadku $a = 0$)

Podprzestrzeń pierwiastkowa $V_{[a]}$ endomorfizmu ϕ równa jest podprzestrzeni pierwiastkowej $V_{[0]}$ endomorfizmu $\phi - a\,\mathrm{id}$. Co więcej,

$$w_{\phi - a\,\mathrm{id}\,|_{V_{[0]}}}(\lambda) = (-\lambda)^{\dim V_{[a]}}.$$

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze $\phi^k = 0$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

Nasz cel. Twierdzenie Jordana - przypadek nilpotentny

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest n wymiarowa nad ciałem K. Wówczas ϕ jest w pewnej bazie V opisane macierzą blokowo-diagonalną o klatkach Jordana:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{s_i}(K).$$

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze $\phi^k = 0$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

Kolejny cel: wniosek opisujący klasy równoważności macierzy nilpotentnych

Istnieje bijekcja pomiędzy klasami podobieństwa macierzy nilpotentnych rozmiaru n nad ciałem K oraz podziałami liczby n (lub diagramami Younga tych podziałów). Polega ona na przypisaniu postaci Jordana macierzy nilpotentnej N o n_q klatkach Jordana rozmiaru q podziału $\lambda = (\underbrace{q, \ldots, q}_{n_q}, \underbrace{q-1, \ldots, q-1}_{n_{q-1}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1})$ liczby n.

Postaci Jordana macierzy endomorfizmów nilpotentnych przestrzeni K^4
i odpowiadające im diagramy Younga z wpisanymi wektorami z bazy Jordana

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\begin{array}{|c|}\hline \epsilon_1 \\ \hline \epsilon_2 \\ \hline \epsilon_3 \\ \hline \epsilon_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \hline \epsilon_3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \epsilon_4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \hline \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \hline \epsilon_4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ \hline \end{array}$$

$$V_{[0]} = V_{\epsilon_1} \oplus V_{\epsilon_2} \oplus V_{\epsilon_3} \oplus V_{\epsilon_4} \quad V_{[0]} = V_{\epsilon_2} \oplus V_{\epsilon_3} \oplus V_{\epsilon_4} \quad V_{[0]} = V_{\epsilon_2} \oplus V_{\epsilon_4} \quad V_{[0]} = V_{\epsilon_3} \oplus V_{\epsilon_4} \quad V_{[0]} = V_{\epsilon_4}$$

Twierdzenie Jordana - przypadek nilpotentny

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie nilpotentny stopnia q, gdzie V jest n wymiarowa nad ciałem K. Wówczas istnieje podział $\lambda = (\underbrace{q, \dots, q}_{n_q}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_{n_{q-1}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_1})$

liczby n oraz wektory

$$e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q,$$

że dla każdych $1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k$ układ $\mathcal{B} = (\mathcal{B})_{lk}$, gdzie

$$\mathcal{B}_{lk} = \{\phi^{k-1}(e_l^{(k)}), \phi^{k-2}(e_l^{(k)}), \dots, \phi(e_l^{(k)}), e_l^{(k)}\}$$

jest bazą Jordana przestrzeni V o podziale λ, przy czym:

$$V = \bigoplus_{1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k} \mathrm{lin}(\mathcal{B}_{lk}) = \bigoplus_{1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k} V_{e_l^{(k)}}$$

oraz macierz ϕ ograniczonego do $V_{e_l^{(k)}}$ to klatka Jordana rozmiaru k.

Rozmieszczenie układu $\mathcal{B}$ w diagramie Younga:

- określamy $V_k = \ker \phi^k$,
- w kolumnie k są wektory z $V_k \setminus V_{k-1}$
- na lewo od pola z elementem $x \in V_k$ znajduje się $\phi(x) \in V_{k-1}$
- wiersz długości k odpowiada jednej klatce $k \times k$ w postaci Jordana,
- skad brać wektory $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)}$?

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$				
$e_1^{(1)}$					
$\vdots$					
$e_{n_1}^{(1)}$					

Skad się będą brały te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

Skad się będą brały te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.

Skad się będą brały te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

Skad się będą brały te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \le k \le q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.
- Podprzestrzenie $V_{e_i^{(q-1)}}$ są wymiaru $q-1$. W naturalnych bazach tych przestrzeni $M(\phi|_{V_{e_i^{(q-1)}}})$ to jedna z n_{q-1} klatek Jordana rozmiaru $q-1$.

Skad się będą brały te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.
- Podprzestrzenie $V_{e_i^{(q-1)}}$ są wymiaru $q-1$. W naturalnych bazach tych przestrzeni $M(\phi|_{V_{e_i^{(q-1)}}})$ to jedna z n_{q-1} klatek Jordana rozmiaru $q-1$.
- Itd. Aby wybrać $e_i^{(j)}$ posłużymy się przestrzeniami ilorazowymi.

Definicja

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K i niech $\alpha \in V$. Zbiór $\alpha + W = \{\alpha + \gamma \,|\, \gamma \in W\}$ nazywamy **warstwą podprzestrzeni** W w przestrzeni V.

Definicja

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V nad ciałem K i niech $\alpha \in V$. Zbiór $\alpha + W = \{\alpha + \gamma \,|\, \gamma \in W\}$ nazywamy **warstwą podprzestrzeni** W w przestrzeni V.

Uwaga

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas:

- $\alpha + W = \beta + W \iff \alpha - \beta \in W$,
- $(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W$ oraz[a] $a(\alpha + W) = (a\alpha) + W$,
- zbiór
$$V/W = \{\alpha + W \,|\, \alpha \in V\}$$
z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar określonymi wyżej oraz z warstwą $0 + W$ tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K.

[a] Dla podzbioru $X \subseteq V$ przez aX określamy podzbiór V postaci $\{a\alpha \,|\, \alpha \in X\}$.

Definicja

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to zbiór V/U z dodawaniem i mnożeniem warstw określonym wcześniej nazywany jest **przestrzenią ilorazową** V modulo U. **Kowymiarem** przestrzeni U w V nazywamy wymiar przestrzeni V/U.

Definicja

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to zbiór V/U z dodawaniem i mnożeniem warstw określonym wcześniej nazywany jest **przestrzenią ilorazową** V modulo U. **Kowymiarem** przestrzeni U w V nazywamy wymiar przestrzeni V/U.

Przykład. Przestrzeń $\mathbb{R}^2/\operatorname{lin}(0,1)$ składa się z warstw

$$(x,y)+\operatorname{lin}(0,1),$$

przy czym dla $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ równoważne są warunki:

- $(x_1,y_1)+\operatorname{lin}(0,1)=(x_2,y_2)+\operatorname{lin}(0,1)$,
- $(x_1-x_2,y_1-y_2)\in\operatorname{lin}(0,1)$,
- $x_1=x_2$.

Definicja

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to zbiór V/U z dodawaniem i mnożeniem warstw określonym wcześniej nazywany jest **przestrzenią ilorazową** V modulo U. **Kowymiarem** przestrzeni U w V nazywamy wymiar przestrzeni V/U.

Przykład. Przestrzeń $\mathbb{R}^2/\operatorname{lin}(0,1)$ składa się z warstw

$$(x,y)+\operatorname{lin}(0,1),$$

przy czym dla $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ równoważne są warunki:

- $(x_1,y_1)+\operatorname{lin}(0,1)=(x_2,y_2)+\operatorname{lin}(0,1)$,
- $(x_1-x_2,y_1-y_2)\in\operatorname{lin}(0,1)$,
- $x_1=x_2$.

Bijekcja $(x,y)+\operatorname{lin}(0,1)\mapsto(x,0)$ zadaje izomorfizm przestrzeni liniowych

$$\mathbb{R}^2/\operatorname{lin}(0,1)\simeq\operatorname{lin}(1,0).$$

Definicja

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to zbiór V/U z dodawaniem i mnożeniem warstw określonym wcześniej nazywany jest **przestrzenią ilorazową** V modulo U. **Kowymiarem** przestrzeni U w V nazywamy wymiar przestrzeni V/U.

Definicja

Odwzorowanie $\pi : V \to V/U$ przypisujące każdemu elementowi $v \in V$ warstwę $v + U$ nazywane jest **naturalnym rzutowaniem** na V/U. Obraz $v \in V$ jest często oznaczany w skrócie jako $\overline{v}$ (o ile jest jasne czym jest U).

Definicja

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to zbiór V/U z dodawaniem i mnożeniem warstw określonym wcześniej nazywany jest **przestrzenią ilorazową** V modulo U. **Kowymiarem** przestrzeni U w V nazywamy wymiar przestrzeni V/U.

Definicja

Odwzorowanie $\pi : V \to V/U$ przypisujące każdemu elementowi $v \in V$ warstwę $v + U$ nazywane jest **naturalnym rzutowaniem** na V/U. Obraz $v \in V$ jest często oznaczany w skrócie jako $\overline{v}$ (o ile jest jasne czym jest U).

Przykład. Biorąc naturalne rzutowanie $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\operatorname{lin}(0,1)$ mamy: $\overline{(1,0)} = \overline{(1,1)}$.

Fakt

Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas przekształcenie $\overline{\phi} : V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ określone wzorem:

$$\overline{\phi}(v + \ker\phi) = \phi(v)$$

jest dobrze określonym izomorfizmem.

W szczególności jeśli $V = U \oplus W$ oraz π jest rzutem na U, to $V/U \simeq W$, czyli

$$\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U.$$

Fakt

Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas przekształcenie $\overline{\phi} : V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ określone wzorem:

$$\overline{\phi}(v + \ker\phi) = \phi(v)$$

jest dobrze określonym izomorfizmem.

W szczególności jeśli $V = U \oplus W$ oraz π jest rzutem na U, to $V/U \simeq W$, czyli

$$\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U.$$

Dowód.

- Oczywiście jeśli $v + \ker\phi = v' + \ker\phi$, to $v - v' \in \ker(\phi)$, więc $\phi(v - v') = 0$. Czyli $\phi(v) = \phi(v')$. Zatem $\overline{\phi}$ jest dobrze określone.

Fakt

Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas przekształcenie $\overline{\phi} : V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ określone wzorem:

$$\overline{\phi}(v + \ker\phi) = \phi(v)$$

jest dobrze określonym izomorfizmem.

W szczególności jeśli $V = U \oplus W$ oraz π jest rzutem na U, to $V/U \simeq W$, czyli

$$\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U.$$

Dowód.

- Oczywiście jeśli $v + \ker\phi = v' + \ker\phi$, to $v - v' \in \ker(\phi)$, więc $\phi(v - v') = 0$. Czyli $\phi(v) = \phi(v')$. Zatem $\overline{\phi}$ jest dobrze określone.
- Liniowość $\overline{\phi}$ wynika łatwo z liniowości ϕ.

Fakt

Niech $\phi \in L(V, W)$. Wówczas przekształcenie $\overline{\phi} : V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ określone wzorem:

$$\overline{\phi}(v + \ker\phi) = \phi(v)$$

jest dobrze określonym izomorfizmem.

W szczególności jeśli $V = U \oplus W$ oraz π jest rzutem na U, to $V/U \simeq W$, czyli

$$\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U.$$

Dowód.

- Oczywiście jeśli $v + \ker\phi = v' + \ker\phi$, to $v - v' \in \ker(\phi)$, więc $\phi(v - v') = 0$. Czyli $\phi(v) = \phi(v')$. Zatem $\overline{\phi}$ jest dobrze określone.
- Liniowość $\overline{\phi}$ wynika łatwo z liniowości ϕ.
- Oczywiście $\overline{\phi}$ jest surjekcją, zaś jeśli $\overline{\phi}(v + \ker(\phi)) = 0$, to $\phi(v) = 0$, czyli $v + \ker(\phi) = 0 + \ker(\phi)$. A zatem $\ker(\overline{\phi}) = 0 + \ker(\phi)$, czyli ϕ to injekcja.

Ćwiczenie (inny dowód formuły na wymiar)

Niech U bedzie podprzestrzenią V (wymiar nie musi być skończony).

- Jeśli X jest bazą U oraz $Y \subseteq V$ jest takie, że $\{y + U \mid y \in Y\}$ jest bazą V/U, to $X \cap Y = \emptyset$ oraz $X \cup Y$ jest bazą V.

  Innymi słowy bazę V można otrzymać dokładając bazę U do reprezentantów bazy V/U w V.

Ćwiczenie (inny dowód formuły na wymiar)

Niech U bedzie podprzestrzenią V (wymiar nie musi być skończony).

- Jeśli X jest bazą U oraz $Y \subseteq V$ jest takie, że $\{y + U \mid y \in Y\}$ jest bazą V/U, to $X \cap Y = \emptyset$ oraz $X \cup Y$ jest bazą V.

  Innymi słowy bazę V można otrzymać dokładając bazę U do reprezentantów bazy V/U w V.

- Odwrotnie, jeśli B jest bazą V taką, że $A \subseteq B$ jest bazą U, wtedy $\{v + U \mid v \in B \setminus A\}$ jest bazą V/U.

  Innymi słowy baza V/U może być otrzymana przez wzięcie warstw elementów powstałych z bazy V po usunięciu z niej bazy U (o ile w niej jest).

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Niech

$$\overline{V_k} = V_k / V_{k-1}.$$

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Niech

$$\overline{V_k} = V_k / V_{k-1}.$$

Szukana baza Jordana wypełni diagram Younga o q kolumnach, gdzie w k-tej kolumnie wpisani będą reprezentanci bazy $\overline{V_k}$. Jaka to będzie baza?

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Niech

$$\overline{V_k} = V_k / V_{k-1}.$$

Wiemy, że $v \in V_k$ wtedy i tylko wtedy gdy $\phi(v) \in V_{k-1}$. Zatem przekształcenie $\phi' : \overline{V_k} \to \overline{V_{k-1}}$ dane wzorem

$$v + V_{k-1} \mapsto \phi(v) + V_{k-2}$$

to monomorfizm (intuicja: nie sklejamy elementów przy *uzupełnianiu w lewo*).

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Niech

$$\overline{V_k} = V_k / V_{k-1}.$$

Wiemy, że $v \in V_k$ wtedy i tylko wtedy gdy $\phi(v) \in V_{k-1}$. Zatem przekształcenie $\phi' : \overline{V_k} \to \overline{V_{k-1}}$ dane wzorem

$$v + V_{k-1} \mapsto \phi(v) + V_{k-2}$$

to monomorfizm. Dla $0 < k < q$ określamy:

$$\overline{\overline{V_k}} = \overline{V_k} / \phi'(\overline{V_{k+1}}) = (V_k / V_{k-1}) / (\phi(V_{k+1}) / V_{k-1}).$$

Dowód twierdzenia Jordana w przypadku nilpotentnym. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$. Mamy

$$\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V.$$

Niech

$$\overline{V_k} = V_k / V_{k-1}.$$

Wiemy, że $v \in V_k$ wtedy i tylko wtedy gdy $\phi(v) \in V_{k-1}$. Zatem przekształcenie $\phi' : \overline{V_k} \to \overline{V_{k-1}}$ dane wzorem

$$v + V_{k-1} \mapsto \phi(v) + V_{k-2}$$

to monomorfizm. Dla $0 < k < q$ określamy:

$$\overline{\overline{V_k}} = \overline{V_k} / \phi'(\overline{V_{k+1}}) = (V_k / V_{k-1}) / (\phi(V_{k+1}) / V_{k-1}).$$

Intuicja: w kolumnie k-tej diagramu Younga mają stać reprezentanci bazy $\overline{V_k}$, spośród których wykluczyć chcemy reprezentantów pochodzących (przez ϕ') z dalszych kolumn ($k + 1, k + 2, \ldots, q$). Pozostali reprezentanci reprezentantów bazy $\overline{\overline{V_k}}$ generować będą poszukiwane przez nas podprzestrzenie cykliczne.

Niech $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)} \in V_q$ będą reprezentantami bazy V_q / V_{q-1} oraz dla $k < q$ niech

$$\overline{\overline{V_k}} = \overline{V_k} / \phi'(\overline{V_{k+1}}) = (V_k / V_{k-1}) / (\phi(V_{k+1}) / V_{k-1}) \simeq V_k / \phi(V_{k+1}).$$

Niech $n_k = \dim \overline{\overline{V_k}}$ i rozważmy układ liniowo niezależny

$$e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V_k$$

taki, że $\overline{\overline{e_1^{(k)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_k}^{(k)}}}$ jest bazą $\overline{\overline{V_k}}$.

Niech $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)} \in V_q$ będą reprezentantami bazy V_q/V_{q-1} oraz dla $k < q$ niech

$$\overline{\overline{V_k}} = \overline{V_k}/\phi'(\overline{V_{k+1}}) = (V_k/V_{k-1})/(\phi(V_{k+1})/V_{k-1}) \simeq V_k/\phi(V_{k+1}).$$

Niech $n_k = \dim \overline{\overline{V_k}}$ i rozważmy układ liniowo niezależny

$$e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V_k$$

taki, że $\overline{\overline{e_1^{(k)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_k}^{(k)}}}$ jest bazą $\overline{\overline{V_k}}$. Równoważnie warstwy $\overline{e_1^{(k)}}, \ldots, \overline{e_{n_k}^{(k)}} \in \overline{V_k}$ nie są w $\phi'(V_{k+1})$, czyli nie są postaci $\phi(v) + V_{k-1}$, gdzie $v \in V_{k+1} \setminus V_k$.

Niech $e_1^{(q)}, \dots, e_{n_q}^{(q)} \in V_q$ będą reprezentantami bazy V_q/V_{q-1} oraz dla $k < q$ niech

$$\overline{\overline{V_k}} = \overline{V_k}/\phi'(\overline{V_{k+1}}) = (V_k/V_{k-1})/(\phi(V_{k+1})/V_{k-1}) \simeq V_k/\phi(V_{k+1}).$$

Niech $n_k = \dim \overline{\overline{V_k}}$ i rozważmy układ liniowo niezależny

$$e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)} \in V_k$$

taki, że $\overline{\overline{e_1^{(k)}}}, \dots, \overline{\overline{e_{n_k}^{(k)}}}$ jest bazą $\overline{\overline{V_k}}$. Równoważnie warstwy $\overline{e_1^{(k)}}, \dots, \overline{e_{n_k}^{(k)}} \in \overline{V_k}$ nie są w $\phi'(V_{k+1})$, czyli nie są postaci $\phi(v) + V_{k-1}$, gdzie $v \in V_{k+1} \setminus V_k$.

Twierdzimy, że dla każdych $1 \le k \le q, 1 \le l \le n_k$ układ $\mathcal{B} = (\mathcal{B})_{lk}$, gdzie

$$\mathcal{B}_{lk} = \{\phi^{k-1}(e_l^{(k)}), \phi^{k-2}(e_l^{(k)}), \dots, \phi(e_l^{(k)}), e_l^{(k)}\}$$

jest bazą przestrzeni V o podziale $\lambda = (\underbrace{q, \dots, q}_{n_q}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_{n_{q-1}}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_1})$,

przy czym $V = \bigoplus_{1 \le k \le q, 1 \le l \le n_k} \mathrm{lin}(\mathcal{B}_{lk}) = \bigoplus_{1 \le k \le q, 1 \le l \le n_k} V_{e_l^{(k)}}$ oraz macierz ϕ ograniczonego do $V_{e_l^{(k)}}$ to klatka Jordana rozmiaru k.

Rozmieszczenie układu $\mathcal{B}$ w diagramie Younga:

- w kolumnie k są reprezentanci baz V_k/V_{k-1}
- na lewo od pola z elementem $x \in V_k$ znajduje się $\phi(x) \in V_{k-1}$
- w ostatnich polach wierszy są reprezentanci baz $\overline{\overline{V_k}}$, co formalizuje wcześniejszą konstrukcję.

$V_1 = \ker\phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$				
$e_1^{(1)}$					
$\vdots$					
$e_{n_1}^{(1)}$					

Rozmieszczenie układu $\mathcal{B}$ w diagramie Younga:

- jest jasne, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą, to jest to baza Jordana ϕ,
- w bazie tej ϕ ma n_i klatek rozmiaru i,
- wykażemy, że $\mathcal{B}$ jest liniowo niezależny oraz, że $|B| = \dim V$,
- kluczowa idea: wykonanie ϕ^i zeruje elementy z i kolumn.

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$				
$e_1^{(1)}$					
$\vdots$					
$e_{n_1}^{(1)}$					

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V.

- Punktem wyjścia jest rozważenie kombinacji liniowej:
$$\sum_{1\leq k\leq q,\, 0\leq r\leq k-1,\, 1\leq n\leq n_k} \lambda_{k,r,n} \cdot \phi^r(e_n^{(k)}) = 0, \qquad (*)$$
dla pewnych $\lambda_{k,r,n} \in K$ (k - kolumna, r - potęga, n - numer).

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V.

- Punktem wyjścia jest rozważenie kombinacji liniowej:
$$\sum_{1\leq k\leq q,\, 0\leq r\leq k-1,\, 1\leq n\leq n_k} \lambda_{k,r,n} \cdot \phi^r(e_n^{(k)}) = 0, \qquad (*)$$
dla pewnych $\lambda_{k,r,n} \in K$ (k - kolumnna, r - potęga, n - numer).
- Chcemy pokazywać, że kolejne współczynniki tej kombinacji są zerowe. Wykonujemy to kolejno dla współczynników przy wektorach
    - wpisanych w ostatnie n_q wierszy kolumny q,
    - wpisanych w ostatnie n_{q-1} wierszy kolumny $q-1$,
    - wpisanych w pierwsze n_q wierszy kolumny $q-1$,
    - wpisanych w ostatnie n_{q-2} wierszy kolumny $q-2$,
    - wpisanych we wcześniejsze n_{q-1} wierszy kolumny $q-2$,
    - wpisanych w pierwsze n_q wierszy kolumny $q-2$,
    - wpisanych w ostatnie n_{q-3} wierszy kolumny $q-3$,
    - ... (krótko mówiąc to podwójna indukcja)

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-1}. Po prawej zeruje się wszystko poza kombinacją elementów z ostatniej kolumny, czyli z $V_q \setminus V_{q-1}$ (które zeruje dopiero ϕ^q), czyli mamy:

$$\phi^{q-1}(\underbrace{\lambda_{q,0,1} \cdot e_1^{(q)} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot e_{n_q}^{(q)}}_{\zeta}) = \phi^{q-1}(\zeta) = 0.$$

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-1}. Po prawej zeruje się wszystko poza kombinacją elementów z ostatniej kolumny, czyli z $V_q \setminus V_{q-1}$ (które zeruje dopiero ϕ^q), czyli mamy:
$$\phi^{q-1}(\underbrace{\lambda_{q,0,1} \cdot e_1^{(q)} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot e_{n_q}^{(q)}}_{\zeta}) = \phi^{q-1}(\zeta) = 0.$$
- Zatem $\zeta \in \ker \phi^{q-1} = V_{q-1}$, czyli $\overline{\zeta} = \overline{0}$ w $V_q/V_{q-1} = \overline{V_q}$, czyli $\overline{\overline{\zeta}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_q}}$.

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-1}. Po prawej zeruje się wszystko poza kombinacją elementów z ostatniej kolumny, czyli z $V_q \setminus V_{q-1}$ (które zeruje dopiero ϕ^q), czyli mamy:

$$\phi^{q-1}(\underbrace{\lambda_{q,0,1} \cdot e_1^{(q)} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot e_{n_q}^{(q)}}_{\zeta}) = \phi^{q-1}(\zeta) = 0.$$

- Zatem $\zeta \in \ker \phi^{q-1} = V_{q-1}$, czyli $\overline{\zeta} = \overline{0}$ w $V_q/V_{q-1} = \overline{V_q}$, czyli $\overline{\overline{\zeta}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_q}}$.
- A zatem mamy:

$$\lambda_{q,0,1} \cdot \overline{\overline{e_1^{(q)}}} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot \overline{\overline{e_{n_q}^{(q)}}} = \overline{\overline{0}}.$$

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-1}. Po prawej zeruje się wszystko poza kombinacją elementów z ostatniej kolumny, czyli z $V_q \setminus V_{q-1}$ (które zeruje dopiero ϕ^q), czyli mamy:

$$\phi^{q-1}(\underbrace{\lambda_{q,0,1} \cdot e_1^{(q)} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot e_{n_q}^{(q)}}_{\zeta}) = \phi^{q-1}(\zeta) = 0.$$

- Zatem $\zeta \in \ker \phi^{q-1} = V_{q-1}$, czyli $\overline{\zeta} = \overline{0}$ w $V_q/V_{q-1} = \overline{V_q}$, czyli $\overline{\overline{\zeta}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_q}}$.
- A zatem mamy:

$$\lambda_{q,0,1} \cdot \overline{\overline{e_1^{(q)}}} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot \overline{\overline{e_{n_q}^{(q)}}} = \overline{\overline{0}}.$$

- Ale $\overline{\overline{e_1^{(q)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_q}^{(d)}}}$ to baza $\overline{\overline{V_q}}$, czyli

$$\lambda_{q,0,1} = \ldots = \lambda_{q,0,n_q} = 0.$$

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.

- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-1}. Po prawej zeruje się wszystko poza kombinacją elementów z ostatniej kolumny, czyli z $V_q \setminus V_{q-1}$ (które zeruje dopiero ϕ^q), czyli mamy:

$$\phi^{q-1}(\underbrace{\lambda_{q,0,1} \cdot e_1^{(q)} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot e_{n_q}^{(q)}}_{\zeta}) = \phi^{q-1}(\zeta) = 0.$$

- Zatem $\zeta \in \ker \phi^{q-1} = V_{q-1}$, czyli $\overline{\zeta} = \overline{0}$ w $V_q/V_{q-1} = \overline{V_q}$, czyli $\overline{\overline{\zeta}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_q}}$.
- A zatem mamy:

$$\lambda_{q,0,1} \cdot \overline{\overline{e_1^{(q)}}} + \ldots + \lambda_{q,0,n_q} \cdot \overline{\overline{e_{n_q}^{(q)}}} = \overline{\overline{0}}.$$

- Ale $\overline{\overline{e_1^{(q)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_q}^{(d)}}}$ to baza $\overline{\overline{V_q}}$, czyli

$$\lambda_{q,0,1} = \ldots = \lambda_{q,0,n_q} = 0.$$

  A zatem kombinacja $(*)$ nie zawiera elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q-1.q-1. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

- W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q-1.q-1. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

- W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.
- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-2}. Po prawej zeruje się wszystko poza elementami $\mathcal{B}$ wpisanymi do $q-1$-kolumny diag. Younga, czyli

$$\phi^{q-2}\left(\sum_i \lambda_{q-1,1,i} \cdot \phi(e_i^{(q)}) + \sum_i \lambda_{q-1,0,i} \cdot e_i^{(q-1)}\right) = \phi^{q-2}(\phi(\zeta^{(0)})+\zeta^{(1)}) = 0. \quad (**)$$

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q-1.q-1. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

- W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.
- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-2}. Po prawej zeruje się wszystko poza elementami $\mathcal{B}$ wpisanymi do $q-1$-kolumny diag. Younga, czyli

$$\phi^{q-2}\left(\sum_i \lambda_{q-1,1,i}\cdot\phi(e_i^{(q)}) + \sum_i \lambda_{q-1,0,i}\cdot e_i^{(q-1)}\right) = \phi^{q-2}(\phi(\zeta^{(0)})+\zeta^{(1)}) = 0. \quad (**)$$

- Z definicji $\phi(\zeta^{(0)}) + \zeta^{(1)}$ należy do V_{q-1}, ale skoro zeruje się na ϕ^{q-2}, to w istocie należy do V_{q-2}. Zatem w $\overline{V_{q-1}}$ mamy $\overline{0} = \phi'(\overline{\zeta^{(0)}}) + \overline{\zeta^{(1)}}$.

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q-1.q-1. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

- W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.
- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-2}. Po prawej zeruje się wszystko poza elementami $\mathcal{B}$ wpisanymi do $q-1$-kolumny diag. Younga, czyli

$$\phi^{q-2}\left(\sum_i \lambda_{q-1,1,i} \cdot \phi(e_i^{(q)}) + \sum_i \lambda_{q-1,0,i} \cdot e_i^{(q-1)}\right) = \phi^{q-2}(\phi(\zeta^{(0)})+\zeta^{(1)}) = 0. \quad (**)$$

- Z definicji $\phi(\zeta^{(0)}) + \zeta^{(1)}$ należy do V_{q-1}, ale skoro zeruje się na ϕ^{q-2}, to w istocie należy do V_{q-2}. Zatem w $\overline{V_{q-1}}$ mamy $\overline{0} = \phi'(\overline{\zeta^{(0)}}) + \overline{\zeta^{(1)}}$.
- Zatem $\overline{\zeta^{(1)}} \in \phi'(V_q)$, czyli $\overline{\overline{\zeta^{(1)}}} = \overline{\overline{0}}$. Ale $\overline{\overline{\zeta^{(1)}}}$ to kombinacja liniowa elementów $\overline{\overline{e_1^{(q-1)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_{q-1}}^{(q-1)}}}$ z bazy $\overline{\overline{V_{q-1}}}$, stąd $\lambda_{q-1,0,i}$ są zerami.

Dowodzimy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Krok q-1.q. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi(e_1^{(q)}), \ldots, \phi(e_{n_q}^{(q)})$.

- W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumny q.
- Obkładamy obie strony $(*)$ przekształceniem ϕ^{q-2}. Po prawej zeruje się wszystko poza elementami $\mathcal{B}$ wpisanymi do $q-1$-kolumny diag. Younga, czyli

$$\phi^{q-2}\left(\sum_i \lambda_{q-1,1,i} \cdot \phi(e_i^{(q)}) + \sum_i \lambda_{q-1,0,i} \cdot e_i^{(q-1)}\right) = \phi^{q-2}(\phi(\zeta^{(0)}) + \zeta^{(1)}) = 0. \quad (**)$$

- Z definicji $\phi(\zeta^{(0)}) + \zeta^{(1)}$ należy do V_{q-1}, ale skoro zeruje się na ϕ^{q-2}, to w istocie należy do V_{q-2}. Zatem w $\overline{V_{q-1}}$ mamy $\overline{0} = \phi'(\overline{\zeta^{(0)}}) + \overline{\zeta^{(1)}}$.
- Zatem $\overline{\zeta^{(1)}} \in \phi'(V_q)$, czyli $\overline{\overline{\zeta^{(1)}}} = \overline{\overline{0}}$. Ale $\overline{\overline{\zeta^{(1)}}}$ to kombinacja liniowa elementów $\overline{\overline{e_1^{(q-1)}}}, \ldots, \overline{\overline{e_{n_{q-1}}^{(q-1)}}}$ z bazy $\overline{\overline{V_{q-1}}}$, stąd $\lambda_{q-1,0,i}$ są zerami.
- Stąd w $(**)$ mamy $\phi^{q-1}(\zeta^{(0)}) = 0$, gdzie $\zeta^{(0)}$ to kombinacja reprezentantów $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$, czyli postępując jak w kroku q.q dostajemy: $\lambda_{q-1,1,i} = 0$. Wyeliminowaliśmy zatem z $(*)$ wyrazy z $q-1$-wszej kolumny.

Krok q-k.q-j. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi^{k-j}(e_1^{(q-j)}), \ldots, \phi^{k-j}(e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ z kolumny $q-k$.

- Dalej podwójna indukcja dla k, j. W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumn $q-k+1, \ldots, q$. Zaczynamy od kroku q-k.q-k.

Krok q-k.q-j. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi^{k-j}(e_1^{(q-j)}), \ldots, \phi^{k-j}(e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ z kolumny $q-k$.

- Dalej podwójna indukcja dla k, j. W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumn $q-k+1, \ldots, q$. Zaczynamy od kroku q-k.q-k.
- Obkładamy $(*)$ ϕ^{q-k-1}, które zeruje wszystko poza kolumną $q-k$ dając:

$$\phi^{q-k-1}\left(\phi^k(\zeta^{(0)}) + \ldots + \phi(\zeta^{(k-1)}) + \zeta^{(k)}\right) = 0,$$

gdzie $\zeta^{(j)} \in \mathrm{lin}(e_1^{(q-j)}, \ldots, e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ (ale współczynniki są z kolumny $q-k$).

Krok q-k.q-j. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi^{k-j}(e_1^{(q-j)}),\ldots,\phi^{k-j}(e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ z kolumny $q-k$.

- Dalej podwójna indukcja dla k, j. W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumn $q-k+1,\ldots,q$. Zaczynamy od kroku q-k.q-k.
- Obkładamy $(*)$ ϕ^{q-k-1}, które zeruje wszystko poza kolumną $q-k$ dając:

$$\phi^{q-k-1}\left(\phi^k(\zeta^{(0)})+\ldots+\phi(\zeta^{(k-1)})+\zeta^{(k)}\right)=0,$$

  gdzie $\zeta^{(j)}\in \mathrm{lin}(e_1^{(q-j)},\ldots,e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ (ale współczynniki są z kolumny $q-k$).
- Stąd wywodzi się, że najpierw, że $\overline{\overline{\zeta^{(k)}}}=\overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_{q-k}}}$, czyli $\lambda_{q-k,0,i}=0$.

Krok q-k.q-j. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi^{k-j}(e_1^{(q-j)}), \ldots, \phi^{k-j}(e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ z kolumny $q-k$.

- Dalej podwójna indukcja dla k, j. W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumn $q-k+1, \ldots, q$. Zaczynamy od kroku q-k.q-k.
- Obkładamy $(*)$ ϕ^{q-k-1}, które zeruje wszystko poza kolumną $q-k$ dając:

$$\phi^{q-k-1}\left(\phi^k(\zeta^{(0)}) + \ldots + \phi(\zeta^{(k-1)}) + \zeta^{(k)}\right) = 0,$$

  gdzie $\zeta^{(j)} \in \mathrm{lin}(e_1^{(q-j)}, \ldots, e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ (ale współczynniki są z kolumny $q-k$).

- Stąd wywodzi się, że najpierw, że $\overline{\overline{\zeta^{(k)}}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_{q-k}}}$, czyli $\lambda_{q-k,0,i} = 0$.
- Następnie w kroku q-k, q-k+1 $(*)$ obkładamy ϕ^{q-k}, co sprawia, że

$$\phi^{q-k}\left(\phi^{k-1}(\zeta^{(1)}) + \ldots + \phi(\zeta^{(k-1)})\right) = 0,$$

  skąd wywodzi się że $\overline{\overline{\zeta^{(k-1)}}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_{q-k+1}}}$, czyli $\lambda_{q-k,1,i} = 0$...

Krok q-k.q-j. Eliminacja $\lambda_{k,r,n}$ dla $\phi^{k-j}(e_1^{(q-j)}), \ldots, \phi^{k-j}(e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ z kolumny $q-k$.

- Dalej podwójna indukcja dla k, j. W kombinacji $(*)$ nie ma elementów $\mathcal{B}$ wpisanych do kolumn $q-k+1, \ldots, q$. Zaczynamy od kroku q-k.q-k.
- Obkładamy $(*)$ ϕ^{q-k-1}, które zeruje wszystko poza kolumną $q-k$ dając:

$$\phi^{q-k-1}\left(\phi^k(\zeta^{(0)}) + \ldots + \phi(\zeta^{(k-1)}) + \zeta^{(k)}\right) = 0,$$

  gdzie $\zeta^{(j)} \in \mathrm{lin}(e_1^{(q-j)}, \ldots, e_{n_{q-j}}^{(q-j)})$ (ale współczynniki są z kolumny $q-k$).
- Stąd wywodzi się, że najpierw, że $\overline{\overline{\zeta^{(k)}}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_{q-k}}}$, czyli $\lambda_{q-k,0,i} = 0$.
- Następnie w kroku q-k, q-k+1 $(*)$ obkładamy ϕ^{q-k}, co sprawia, że

$$\phi^{q-k}\left(\phi^{k-1}(\zeta^{(1)}) + \ldots + \phi(\zeta^{(k-1)})\right) = 0,$$

  skąd wywodzi się że $\overline{\overline{\zeta^{(k-1)}}} = \overline{\overline{0}}$ w $\overline{\overline{V_{q-k+1}}}$, czyli $\lambda_{q-k,1,i} = 0$...
- ... i tak dalej: w q-k.q-j-tym kroku eliminujemy współczynniki $\lambda_{q-k,j,i} = 0$, co ostatecznie eliminuje $q-k$-tą kolumnę. Dostajemy liniową niezależność $\mathcal{B}$.

Aby pokazać, że $\mathcal{B}$ jest bazą wykażemy, że $|\mathcal{B}| = \dim V$. Mamy:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}| &= q \cdot n_q + (q-1) \cdot n_{q-1} + \ldots + 2 \cdot n_2 + n_1 = \\
&= \sum_{k=1}^{q} k \cdot \dim \overline{\overline{V_k}} = \\
&= \sum_{k=1}^{q} k \cdot \dim \overline{V_k}/\phi'(\overline{V_{k+1}}) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} k \cdot (\dim \overline{V_k} - \dim \phi'(\overline{V_{k+1}})) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} k \cdot (\dim \overline{V_k} - \dim \overline{V_{k+1}}).
\end{aligned}
$$

przy czym w ostatniej równości korzystaliśmy z faktu, że ϕ' to monomorfizm.

Nietrudno sprawdzić, że zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{q} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{q} a_k - q \cdot a_{q+1},$$

zatem skoro w naszej konwencji $a_{q+1} = 0$ (bo $\overline{\overline{V_q}} = \overline{V_q}$), to

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \sum_{k=1}^{q} \dim \overline{V_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{q} \dim(V_k / V_{k-1}) = \\ &= \sum_{k-1}^{q} \dim V_k - \dim V_{k-1} = \dim V_q - \dim V_0 = \dim V. \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że zachodzi równość:

$$\sum_{k=1}^{q} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{q} a_k - q \cdot a_{q+1},$$

zatem skoro w naszej konwencji $a_{q+1} = 0$ (bo $\overline{\overline{V_q}} = \overline{V_q}$), to

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \sum_{k=1}^{q} \dim \overline{V_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{q} \dim(V_k / V_{k-1}) = \\ &= \sum_{k-1}^{q} \dim V_k - \dim V_{k-1} = \dim V_q - \dim V_0 = \dim V. \end{aligned}$$

A zatem $\mathcal{B}$ to układ liniowo niezależny w V oraz $|\mathcal{B}| = \dim V$, czyli jest to baza. Twierdzenie Jordana jest udowodnione.

Wniosek

Jeśli ϕ jest endomorfizmem o wielomianie charakterystycznym

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{t_k}$$

oraz dla $1 \leq i \leq k$ zbiór $\mathcal{B}_i$ jest bazą Jordana endomorfizmu $\phi - a_i \operatorname{id}$ obciętego do swojej podprzestrzeni pierwiastkowej $V_{[0]}$, to układ

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$$

jest bazą Jordana endomorfizmu ϕ.

Dowód.

- Baza Jordana $\phi - a_i \operatorname{id}$ obciętego do swojej podprzestrzeni pierwiastkowej $V_{[0]}$ to baza Jordana ϕ obciętego do swojej podprzestrzeni pierwiastkowej $V_{[a_i]}$,
- Teza wynika zatem z twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe, czyli rozkładu ϕ-niezmienniczego $V = V_{[a_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[a_k]}$.

Wniosek

Niech $A \in M_n(K)$ i niech a będzie wartością własną macierzy A. Dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ niech $q_m = r((A - aI)^{m-1}) - r((A - aI)^m)$. Wówczas jeśli $B \in M_n(K)$ jest macierzą w postaci Jordana podobną do A, to w macierzy B:

(1) Suma rozmiarów klatek odpowiadających a to jej krotność algebraiczna.

(2) Liczba klatek Jordana wymiaru $\geq m$, odpowiadających a wynosi q_m,

(3) Liczba klatek Jordana wymiaru m, odpowiadających a wynosi $q_m - q_{m+1}$.

Wniosek

Niech $A \in M_n(K)$ i niech a będzie wartością własną macierzy A. Dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ niech $q_m = r((A - aI)^{m-1}) - r((A - aI)^m)$. Wówczas jeśli $B \in M_n(K)$ jest macierzą w postaci Jordana podobną do A, to w macierzy B:

(1) Suma rozmiarów klatek odpowiadających a to jej krotność algebraiczna.

(2) Liczba klatek Jordana wymiaru $\geq m$, odpowiadających a wynosi q_m,

(3) Liczba klatek Jordana wymiaru m, odpowiadających a wynosi $q_m - q_{m+1}$.

Dowód. Obserwacja – jeśli macierze A i B są podobne, to dla każdego k macierze $(A - aI)^k$ oraz $(B - aI)^k$ są podobne. Zatem $r(A - aI)^k = r(B - aI)^k$.

Wniosek

Niech $A \in M_n(K)$ i niech a będzie wartością własną macierzy A. Dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ niech $q_m = r((A - aI)^{m-1}) - r((A - aI)^m)$. Wówczas jeśli $B \in M_n(K)$ jest macierzą w postaci Jordana podobną do A, to w macierzy B:

(1) Suma rozmiarów klatek odpowiadających a to jej krotność algebraiczna.

(2) Liczba klatek Jordana wymiaru $\geq m$, odpowiadających a wynosi q_m,

(3) Liczba klatek Jordana wymiaru m, odpowiadających a wynosi $q_m - q_{m+1}$.

Dowód. Obserwacja – jeśli macierze A i B są podobne, to dla każdego k macierze $(A - aI)^k$ oraz $(B - aI)^k$ są podobne. Zatem $r(A - aI)^k = r(B - aI)^k$. Z drugiej strony niech $J_1 = M(\phi)_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{J}'}$ będzie macierzą w postaci Jordana, gdzie $\mathcal{J}'$ to baza Jordana opisana w dowodzie twierdzenia wyżej.

Wniosek

Niech $A \in M_n(K)$ i niech a będzie wartością własną macierzy A. Dla każdego $m = 1, 2, \ldots$ niech $q_m = r((A - aI)^{m-1}) - r((A - aI)^m)$. Wówczas jeśli $B \in M_n(K)$ jest macierzą w postaci Jordana podobną do A, to w macierzy B:

(1) Suma rozmiarów klatek odpowiadających a to jej krotność algebraiczna.

(2) Liczba klatek Jordana wymiaru $\geq m$, odpowiadających a wynosi q_m,

(3) Liczba klatek Jordana wymiaru m, odpowiadających a wynosi $q_m - q_{m+1}$.

Dowód. Obserwacja – jeśli macierze A i B są podobne, to dla każdego k macierze $(A - aI)^k$ oraz $(B - aI)^k$ są podobne. Zatem $r(A - aI)^k = r(B - aI)^k$. Z drugiej strony niech $J_1 = M(\phi)^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{J}'}$ będzie macierzą w postaci Jordana, gdzie $\mathcal{J}'$ to baza Jordana opisana w dowodzie twierdzenia wyżej. Wówczas suma rozmiarów klatek J_1 odpowiadających a to $\dim V_{[a]}$. Natomiast liczba klatek rozmiaru $\geq m$ to suma

$$\dim \overline{\overline{V_m}} + \ldots + \dim \overline{\overline{V_q}}.$$

Mamy:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q} \dim \overline{\overline{V_m}} &= \dim V - \dim V_{q-1} + \sum_{k=m}^{q-1} \dim \overline{V_k}/\phi'(\overline{V_{k+1}}) = \\
&= \dim V - \dim V_{q-1} + \sum_{k=m}^{q-1} \dim \overline{V_k} - \dim \overline{V_{k+1}} = \\
&= \dim V - \dim V_{q-1} + \dim \overline{V_m} - \dim \overline{V_q} = \\
&= \dim V - \dim V_{q-1} + \dim V_m - \dim V_{m-1} - \dim V + \dim V_{q-1} = \\
&= \dim V_m - \dim V_{m-1} = \\
&= \dim \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^m - \dim \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1} = \\
&= (\dim V - \dim \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^m) - (\dim V - \dim \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1}) = \\
&= \dim \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1} - \dim \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^m = \\
&= r((A - aI)^{m-1}) - r((A - aI))^m = q_m.
\end{aligned}
$$

Aby dokończyć dowód należy rozwiązać następujące zadanie.

Ćwiczenie

Jeśli $A, B \in M_n(K)$ są w postaci Jordana i dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy:

$$r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m,$$

to macierze A, B są podobne i różnią się co najwyżej kolejnością klatek.

Aby dokończyć dowód należy rozwiązać następujące zadanie.

Ćwiczenie

Jeśli $A, B \in M_n(K)$ są w postaci Jordana i dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy:

$$r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m,$$

to macierze A, B są podobne i różnią się co najwyżej kolejnością klatek.

Idea dowodu:

- Jeśli X jest macierzą blokowo diagonalną, to X^k jest także blokowo-diagonalna i o klatkach będących k-tymi potęgami klatek X.
- Rząd macierzy blokowo-diagonalnej to suma rzędów poszczególnych klatek. Łatwo policzyć rząd potęgi klatki Jordana.
- Jeśli J i J' są w postaci Jordana i różnią się tylko kolejnością klatek, to łatwo znaleźć (blokową) macierz odwracalną C, że $C^{-1}JC = J'$.

Przykład. Weźmy $A \in M_{16}(\mathbb{R})$ postaci:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
& & & & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & 3 & 1 & 0 & & & & & \\
& & & & & & & & 0 & 3 & 1 & & & & & \\
& & & & & & & & 0 & 0 & 3 & & & & & \\
& & & & & & & & & & & 3 & 1 & 0 & & \\
& & & & & & & & & & & 0 & 3 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & 0 & 0 & 3 & & \\
& & & & & & & & & & & & & & 3 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & & & 0 & 3
\end{bmatrix}$$

Dla $a = 1$ mamy $q_1 = r((A - I)^0) - r((A - I))^1 = 16 - 13 = 3$, bo $A - I$ to:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 2 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 2 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 2
\end{bmatrix}$$

Dla $a = 1$ mamy $q_2 = r((A - I)^1) - r((A - I))^2 = 13 - 11 = 2$, bo $(A - I)^2$ to:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 4 & ? & ? & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 4 & ? & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 4 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 4 & ? & ? & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 4 & ? & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 4 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 4 & ? \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 4
\end{bmatrix}$$

Dla $a = 1$ mamy $q_3 = r((A-I)^2) - r((A-I))^3 = 13 - 11 = 2$, bo $(A-I)^3$ to:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 8 & ? & ? & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 8 & ? & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 8 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 8 & ? & ? & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 8 & ? & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 8 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 8 & ? \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 8
\end{bmatrix}
$$

Dla $a = 3$ mamy $q_1 = r((A-3I)^0) - r((A-3I))^1 = 16 - 13 = 3$, bo $A - 3I$ to:

$$\begin{bmatrix}
-2 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & -2 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & -2 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & -2 & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & -2 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & -2 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & -2 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Wniosek

Jeśli macierze $A, B \in M_n(K)$ można sprowadzić nad K do postaci Jordana, to następujące warunki są równoważne:

- A jest podobna do B,
- dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy: $r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m$.

Wniosek - twierdzenie

Jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym i $A, B \in M_n(K)$ to następujące warunki są równoważne:

- A jest podobna do B,
- dla każdego $\lambda \in K$ oraz m mamy: $r(A - \lambda I)^m = r(B - \lambda I)^m$.

Otrzymaliśmy:

- twierdzenie Jordana dla endomorfizmu triangularyzowalnego,
- twierdzenie o rozkładzie na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych w przypadku, gdy endomorfizm jest nilpotentny (twierdzenie działa dla dowolnego endomorfizmu triangularyzowalnego: dowód - ćwiczenie),
- algorytm wyznaczania bazy Jordana endomorfizmu triangularyzowalnego,
- klasyfikację macierzy z dokładnością do podobieństwa nad ciałem algebraicznie domkniętym.

Otrzymaliśmy:

- twierdzenie Jordana dla endomorfizmu triangularyzowalnego,
- twierdzenie o rozkładzie na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych w przypadku, gdy endomorfizm jest nilpotentny (twierdzenie działa dla dowolnego endomorfizmu triangularyzowalnego: dowód - ćwiczenie),
- algorytm wyznaczania bazy Jordana endomorfizmu triangularyzowalnego,
- klasyfikację macierzy z dokładnością do podobieństwa nad ciałem algebraicznie domkniętym.

Co dalej?

- problem podobieństwa macierzy nad ciałami niealgebraicznie domkniętymi,
- jeszcze trochę o rozkładach – m.in. twierdzenia Jordana-Chevalleya.