Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 4, 11.03.2021 r.

Twierdzenie o rozkładzie prymarnym

Niech $p \in K[\lambda]$ będzie wielomianem o rozkładzie $p = p_1 \dots p_k$, gdzie $p_1, \dots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker p_k(\phi).$$

Twierdzenie o rozkładzie prymarnym

Niech $p \in K[\lambda]$ będzie wielomianem o rozkładzie $p = p_1 \ldots p_k$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \ldots \oplus \ker p_k(\phi).$$

Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dla każdego $a \in K$ przez $V_{[a]}$ oznaczamy podprzestrzeń złożoną ze wszystkich $\alpha \in V$, dla których istnieje n takie, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(\alpha) = 0$. Przestrzeń $V_{[a]}$ nazywamy **podprzestrzenią pierwiastkową** endomorfizmu ϕ lub **uogólnioną podprzestrzenią własną**.

Wniosek - twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Endomorfizm ϕ jest triangularyzowalny wtedy i tylko wtedy, gdy V jest sumą prostą podprzestzeni pierwiastkowych endomorfizmu ϕ.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \dots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \dots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Uwaga. W $\mathbb{Z}[x]$ największy wspólny dzielnik 2 oraz x to (na przykład) 1, ale nie istnieją wielomiany $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, że $1 = 2f(x) + xg(x)$. Fakt ten mówi, że $K[x]$ jest tak zwaną dziedziną ideałów głównych (PID).

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Dowód (identyczny jak dla $\mathbb{Z}$).

- Niech $I = \{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n \mid q_i \in K[x]\} \subseteq K[x]$. Niech $d \in I$ będzie elementem najmniejszego możliwego stopnia. Pokażemy, że jest to, z dokładnością do stałej, NWD wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Dowód (identyczny jak dla $\mathbb{Z}$).

- Niech $I = \{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n \mid q_i \in K[x]\} \subseteq K[x]$. Niech $d \in I$ będzie elementem najmniejszego możliwego stopnia. Pokażemy, że jest to, z dokładnością do stałej, NWD wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Gdyby któreś p_i nie było podzielne przez d, to dzieląc z resztą mamy $p_i = h_i d + r_i$, gdzie $\deg(r_i) < \deg(d)$.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Dowód (identyczny jak dla $\mathbb{Z}$).

- Niech $I = \{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n \mid q_i \in K[x]\} \subseteq K[x]$. Niech $d \in I$ będzie elementem najmniejszego możliwego stopnia. Pokażemy, że jest to, z dokładnością do stałej, NWD wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Gdyby któreś p_i nie było podzielne przez d, to dzieląc z resztą mamy $p_i = h_i d + r_i$, gdzie $\deg(r_i) < \deg(d)$. Ale dla pewnych $q'_1, \ldots, q'_n \in K[x]$ mamy $r_i = p_i - h_i d = p_i - (q'_1 p_1 + \ldots + q'_n p_n)$, zatem $r_i \in I$. Sprzeczność z wyborem d. Zatem d dzieli wszystkie p_i.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Dowód (identyczny jak dla $\mathbb{Z}$).

- Niech $I = \{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n \mid q_i \in K[x]\} \subseteq K[x]$. Niech $d \in I$ będzie elementem najmniejszego możliwego stopnia. Pokażemy, że jest to, z dokładnością do stałej, NWD wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Gdyby któreś p_i nie było podzielne przez d, to dzieląc z resztą mamy $p_i = h_i d + r_i$, gdzie $\deg(r_i) < \deg(d)$. Ale dla pewnych $q'_1, \ldots, q'_n \in K[x]$ mamy $r_i = p_i - h_i d = p_i - (q'_1 p_1 + \ldots + q'_n p_n)$, zatem $r_i \in I$. Sprzeczność z wyborem d. Zatem d dzieli wszystkie p_i.
- Zauważmy, że każdy NWD układu p_i jest dzielnikiem każdego elementu I, a więc i jest dzielnikiem d. Zatem d jest jednym z NWD układu $p_1, \ldots, p_n$.

Lemat 1

Niech K bedzie ciałem. Dla dowolnych $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ oraz dowolnego ich NWD równego g istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_n \in K[x]$ takie, że $q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n = g$.

Dowód (identyczny jak dla $\mathbb{Z}$).

- Niech $I = \{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n \mid q_i \in K[x]\} \subseteq K[x]$. Niech $d \in I$ będzie elementem najmniejszego możliwego stopnia. Pokażemy, że jest to, z dokładnością do stałej, NWD wielomianów $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
- Gdyby któreś p_i nie było podzielne przez d, to dzieląc z resztą mamy $p_i = h_i d + r_i$, gdzie $\deg(r_i) < \deg(d)$. Ale dla pewnych $q_1', \ldots, q_n' \in K[x]$ mamy $r_i = p_i - h_i d = p_i - (q_1' p_1 + \ldots + q_n' p_n)$, zatem $r_i \in I$. Sprzeczność z wyborem d. Zatem d dzieli wszystkie p_i.
- Zauważmy, że każdy NWD układu p_i jest dzielnikiem każdego elementu I, a więc i jest dzielnikiem d. Zatem d jest jednym z NWD układu $p_1, \ldots, p_n$.
- Zatem każdy NWD układu $p_1, \ldots, p_n$ to $g = ad$, gdzie $a \in K$. Dla d' kładziemy $q_i = aq_i'$. To kończy dowód, bo $g = aq_1' p_1 + \ldots + aq_n' p_n$.

Lemat 2

Niech K bedzie ciałem. Każdy wielomian $p \in K[x]$ rozkłada się jednoznacznie, z dokładnością do kolejności czynników i ich skalarnej wielokrotności w K, na iloczyn

$$p = c \cdot p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$

gdzie $p_i \in K[x]$ są nierozkładalne i względnie pierwsze, zaś $c \in K$.

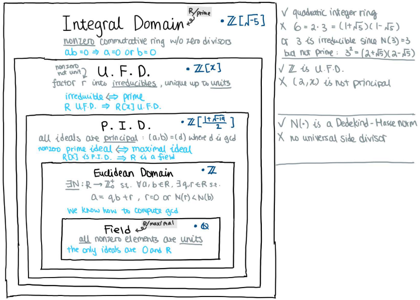
Lemat 2

Niech K bedzie ciałem. Każdy wielomian $p \in K[x]$ rozkłada się jednoznacznie, z dokładnością do kolejności czynników i ich skalarnej wielokrotności w K, na iloczyn

$$p = c \cdot p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$

gdzie $p_i \in K[x]$ są nierozkładalne i względnie pierwsze, zaś $c \in K$.

Uwaga. Rezultat ten mówi, że $K[x]$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu (UFD). Na Algebrze I pokażemy także, że $\mathbb{Z}[x]$ też jest UFD, choć droga dowodu jest tam nieco bardziej skomplikowana. Niemała część algebry oparta jest na dogłębnym zrozumieniu i rozwinięciu bardzo starych i elementarnych pomysłów.



Dowód, cz. 1. Istnienie rozkładu.

- Pokazujemy, że każdy wielomian $p \in K[x]$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne.

Dowód, cz. 1. Istnienie rozkładu.

- Pokazujemy, że każdy wielomian $p \in K[x]$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne.
- Jeśli p jest nierozkładalny – nie ma czego dowodzić.

Dowód, cz. 1. Istnienie rozkładu.

- Pokazujemy, że każdy wielomian $p \in K[x]$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne.
- Jeśli p jest nierozkładalny – nie ma czego dowodzić.
- Niech q najniższego stopnia taki, że nie ma rozkładu. W szczególności nie jest nierozkładalny, sprzeczność.

Dowód, cz. 1. Istnienie rozkładu.

- Pokazujemy, że każdy wielomian $p \in K[x]$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne.
- Jeśli p jest nierozkładalny – nie ma czego dowodzić.
- Niech q najniższego stopnia taki, że nie ma rozkładu. W szczególności nie jest nierozkładalny, sprzeczność.
- Każde dwa wielomiany nierozkładalne p_1, p_2 są względnie pierwsze lub różnią się o stałą. W przeciwnym razie istniałoby ich NWD, które byłoby postaci $q_1 p_1 + q_2 p_2$ i ani nie byłoby stopnia 0, ani nie byłoby ich wspólną skalarną wielokrotnością. To oznaczałoby, że są one rozkładalne.

Dowód, cz. 1. Istnienie rozkładu.

- Pokazujemy, że każdy wielomian $p \in K[x]$ ma rozkład na czynniki nierozkładalne.
- Jeśli p jest nierozkładalny – nie ma czego dowodzić.
- Niech q najniższego stopnia taki, że nie ma rozkładu. W szczególności nie jest nierozkładalny, sprzeczność.
- Każde dwa wielomiany nierozkładalne p_1, p_2 są względnie pierwsze lub różnią się o stałą. W przeciwnym razie istniałoby ich NWD, które byłoby postaci $q_1p_1 + q_2p_2$ i ani nie byłoby stopnia 0, ani nie byłoby ich wspólną skalarną wielokrotnością. To oznaczałoby, że są one rozkładalne.
- A zatem po odpowiednim przegrupowaniu czynników nierozkładalnych dla każdego wielomianu p można znaleźć rozkład $cp_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, gdzie p_i są nierozkładalne i względnie pierwsze.

Dowód, cz. 2. Jednoznaczność rozkładu.

- Fakt pomocniczy 1. Jeśli g jest NWD układu $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, to dla każdego niezerowego $h \in K[x]$ wielomian gh jest NWD układu $p_1 h, \ldots, p_n h$.

Dowód, cz. 2. Jednoznaczność rozkładu.

- Fakt pomocniczy 1. Jeśli g jest NWD układu $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, to dla każdego niezerowego $h \in K[x]$ wielomian gh jest NWD układu $p_1 h, \ldots, p_n h$.
- Fakt pomocniczy 2. Niech $p \in K[x]$ będzie nierozkładalny oraz $p|ab$, dla pewnych $a, b \in K[x]$. Wówczas $p|a$ lub $p|b$.

Dowód, cz. 2. Jednoznaczność rozkładu.

- Fakt pomocniczy 1. Jeśli g jest NWD układu $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, to dla każdego niezerowego $h \in K[x]$ wielomian gh jest NWD układu $p_1 h, \ldots, p_n h$.
- Fakt pomocniczy 2. Niech $p \in K[x]$ będzie nierozkładalny oraz $p|ab$, dla pewnych $a, b \in K[x]$. Wówczas $p|a$ lub $p|b$.
- Korzystając z tych dwóch (krótkich w dowodzie) faktów pokazuje się, że jeśli

$$p_1 \ldots p_m = q_1 \ldots q_n,$$

  gdzie wielomiany $p_i, q_j \in K[x]$ są nierozkładalne, to $m = n$ oraz istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że p_i jest skalarną wielokrotnością $q_{\sigma(i)}$. Argument to indukcja ze względu na $m + n$.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

- Dla $1 \leq i \leq k$ niech $\widehat{p_i} = p/p_i$.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

- Dla $1 \leq i \leq k$ niech $\widehat{p_i} = p/p_i$.
- Niech $v_1 + \ldots + v_k = 0$, dla pewnych $v_i \in \ker p_i(\phi)$.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

- Dla $1 \leq i \leq k$ niech $\widehat{p_i} = p/p_i$.
- Niech $v_1 + \ldots + v_k = 0$, dla pewnych $v_i \in \ker p_i(\phi)$.
- Dla $i \neq j$ mamy $\widehat{p_i}(\phi)(v_j) = 0$, bo $\widehat{p_i}(\phi)$ ma czynnik $p_j(\phi)$.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

- Dla $1 \leq i \leq k$ niech $\widehat{p_i} = p/p_i$.
- Niech $v_1 + \ldots + v_k = 0$, dla pewnych $v_i \in \ker p_i(\phi)$.
- Dla $i \neq j$ mamy $\widehat{p_i}(\phi)(v_j) = 0$, bo $\widehat{p_i}(\phi)$ ma czynnik $p_j(\phi)$.
- Skoro p_i oraz $\widehat{p_i}$ są względnie pierwsze, to istnieją $a_i, b_i \in K[\lambda]$, że $a_i p_i + b_i \widehat{p_i} = 1$, czyli

$$a_i(\phi)p_i(\phi) + b_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi) = \mathrm{id}\,.$$

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy najpierw, że dla każdego i mamy:

$$\ker p_i(\phi) \cap \sum_{j \neq i} \ker p_j(\phi) = \{0\}. \quad (*)$$

- Dla $1 \leq i \leq k$ niech $\widehat{p_i} = p/p_i$.
- Niech $v_1 + \ldots + v_k = 0$, dla pewnych $v_i \in \ker p_i(\phi)$.
- Dla $i \neq j$ mamy $\widehat{p_i}(\phi)(v_j) = 0$, bo $\widehat{p_i}(\phi)$ ma czynnik $p_j(\phi)$.
- Skoro p_i oraz $\widehat{p_i}$ są względnie pierwsze, to istnieją $a_i, b_i \in K[\lambda[$, że $a_i p_i + b_i \widehat{p_i} = 1$, czyli

$$a_i(\phi) p_i(\phi) + b_i(\phi) \widehat{p_i}(\phi) = \mathrm{id}\,.$$

Zatem podstawiając pod tę równość v_i dostajemy $(*)$, bowiem:

$$v_i = a_i(\phi) \underbrace{p_i(\phi)(v_i)}_{0} + b_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v_i) = b_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(-\sum_{j \neq i} v_j) = -\sum_{j \neq i} b_i(\phi) \underbrace{\widehat{p_i}(\phi)(v_j)}_{0} = 0.$$

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy teraz, że:

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) + \ldots + \ker p_k(\phi).$$

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy teraz, że:

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) + \ldots + \ker p_k(\phi).$$

- Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista, bo jak coś się zeruje na $p(\phi)$, to i na jego czynnikach.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy teraz, że:

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) + \ldots + \ker p_k(\phi).$$

- Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista, bo jak coś się zeruje na $p(\phi)$, to i na jego czynnikach.
- Dowodzimy $\subseteq$. Skoro $p_1, \ldots, p_k$ są względnie pierwsze, to również $\widehat{p_1}, \ldots, \widehat{p_k}$ są względnie pierwsze. Zatem istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$, że $q_1\widehat{p_1} + \ldots + q_k\widehat{p_k} = 1$, czyli: $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy teraz, że:

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) + \ldots + \ker p_k(\phi).$$

- Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista, bo jak coś się zeruje na $p(\phi)$, to i na jego czynnikach.
- Dowodzimy $\subseteq$. Skoro $p_1, \ldots, p_k$ są względnie pierwsze, to również $\widehat{p_1}, \ldots, \widehat{p_k}$ są względnie pierwsze. Zatem istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$, że $q_1\widehat{p_1} + \ldots + q_k\widehat{p_k} = 1$, czyli: $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Niech $v \in \ker p(A)$. Z równości wyżej mamy

$$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p}_i(\phi)(v).$$

Dowód twierdzenia o rozkładzie prymarnym:

- Pokażemy teraz, że:

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) + \ldots + \ker p_k(\phi).$$

- Inkluzja $\supseteq$ jest oczywista, bo jak coś się zeruje na $p(\phi)$, to i na jego czynnikach.
- Dowodzimy $\subseteq$. Skoro $p_1, \ldots, p_k$ są względnie pierwsze, to również $\widehat{p_1}, \ldots, \widehat{p_k}$ są względnie pierwsze. Zatem istnieją wielomiany $q_1, \ldots, q_k \in K[\lambda]$, że $q_1\widehat{p_1} + \ldots + q_k\widehat{p_k} = 1$, czyli: $q_1(\phi)\widehat{p_1}(\phi) + \ldots + q_k(\phi)\widehat{p_k}(\phi) = \mathrm{id}$.
- Niech $v \in \ker p(A)$. Z równości wyżej mamy

$$v = \mathrm{id}(v) = \sum_{i=1}^{k} q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v).$$

- Wystarczy pokazać, że $q_i(\phi)\widehat{p_i}(\phi)(v) \in \ker p_i(\phi)$, co wynika z:

$$\color{red}{p_i}(\phi)\left(q_i(\phi)\color{red}{\widehat{p_i}}(\phi)(v)\right) = q_i\color{red}{p}(\phi)(v) = q_i(\phi)0 = 0.$$

Wniosek

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V – skończenie wymiarowa nad ciałem K. Jeśli

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^t \cdot q(\lambda),$$

przy czym $q(\lambda) \in K[\lambda]$ nie dzieli się przez $(\lambda - a)$, to

(1) $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

(2) $\ker q(\phi) = \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

(3) $V = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

(4) $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$,

(5) $\dim V_{[a]} = t$.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.
- q oraz $(\lambda - a)^{n-t}$ są wzgl. pierwsze, zatem istnieją $a, b \in K[\lambda]$, że $aq + b(\lambda - a)^{n-t} = 1$. Czyli $a(\phi)q(\phi) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t} = \mathrm{id}$.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.
- q oraz $(\lambda - a)^{n-t}$ są wzgl. pierwsze, zatem istnieją $a, b \in K[\lambda]$, że $aq + b(\lambda - a)^{n-t} = 1$. Czyli $a(\phi)q(\phi) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t} = \mathrm{id}$.
- Wykonując powyższą równość na wektorze w mamy:

$$\begin{aligned} w &= a(\phi)q(\phi)(w) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t}(\phi)(w) = \\ &= a(\phi)q(\phi)p(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n}(v) = \\ &= a(\phi){\color{red}w_\phi(\phi)(v)} + b(\phi){\color{blue}(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v)}. \end{aligned}$$

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.
- q oraz $(\lambda - a)^{n-t}$ są wzgl. pierwsze, zatem istnieją $a, b \in K[\lambda]$, że $aq + b(\lambda - a)^{n-t} = 1$. Czyli $a(\phi)q(\phi) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t} = \mathrm{id}$.
- Wykonując powyższą równość na wektorze w mamy:

$$\begin{aligned} w &= a(\phi)q(\phi)(w) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t}(\phi)(w) = \\ &= a(\phi)q(\phi)p(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n}(v) = \\ &= a(\phi)w_\phi(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n}(v). \end{aligned}$$

- Z twierdzenia C-H $w_\phi(\phi)(v) = 0$. Także $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) = 0$. W przeciwnym razie skoro $v \in V_{[a]}$, to istniałoby najmniejsze m, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^m(v) = 0$. Gdyby $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) \neq 0$, to $n = \dim V < m$.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.
- q oraz $(\lambda - a)^{n-t}$ są wzgl. pierwsze, zatem istnieją $a, b \in K[\lambda]$, że $aq + b(\lambda - a)^{n-t} = 1$. Czyli $a(\phi)q(\phi) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t} = \mathrm{id}$.
- Wykonując powyższą równość na wektorze w mamy:

$$\begin{aligned} w &= a(\phi)q(\phi)(w) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t}(\phi)(w) = \\ &= a(\phi)q(\phi)p(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) = \\ &= a(\phi)w_\phi(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v). \end{aligned}$$

- Z twierdzenia C-H $w_\phi(\phi)(v) = 0$. Także $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) = 0$. W przeciwnym razie skoro $v \in V_{[a]}$, to istniałoby najmniejsze m, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^m(v) = 0$. Gdyby $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) \neq 0$, to $n = \dim V < m$. Ale $m =$ wymiar podprzestrzeni cyklicznej rozpiętej przez v względem $(\phi - a\,\mathrm{id}) \in \mathrm{End}(V)$, czyli $m \leq \dim V$, sprzeczność. Zatem $w = 0$, sprzeczność.

Dowodzimy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$

- Weźmy $v \in V_{[a]}$, że $w = (\phi - a\,\mathrm{id})^t(v) \neq 0$.
- Niech $\dim V = n$. Oznaczmy: $p = (\lambda - a)^t$.
- q oraz $(\lambda - a)^{n-t}$ są wzgl. pierwsze, zatem istnieją $a, b \in K[\lambda]$, że $aq + b(\lambda - a)^{n-t} = 1$. Czyli $a(\phi)q(\phi) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t} = \mathrm{id}$.
- Wykonując powyższą równość na wektorze w mamy:

$$\begin{aligned} w &= a(\phi)q(\phi)(w) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^{n-t}(\phi)(w) = \\ &= a(\phi)q(\phi)p(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) = \\ &= a(\phi)w_\phi(\phi)(v) + b(\phi)(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v). \end{aligned}$$

- Z twierdzenia C-H $w_\phi(\phi)(v) = 0$. Także $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) = 0$. W przeciwnym razie skoro $v \in V_{[a]}$, to istniałoby najmniejsze m, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^m(v) = 0$. Gdyby $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(v) \neq 0$, to $n = \dim V < m$. Ale $m =$ wymiar podprzestrzeni cyklicznej rozpiętej przez v względem $(\phi - a\,\mathrm{id}) \in \mathrm{End}(V)$, czyli $m \leq \dim V$, sprzeczność. Zatem $w = 0$, sprzeczność.
- Zatem $V_{[a]} \subseteq \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Druga inkluzja wynika z definicji $V_{[a]}$.

Pokazaliśmy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Teraz pokażemy, że $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t = \ker q(\phi)$.

Pokazaliśmy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Teraz pokażemy, że $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t = \ker q(\phi)$ oraz w konsekwencji: $V = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

- Zauważmy, że endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ ma zerowe jądro.

Pokazaliśmy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Teraz pokażemy, że $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t = \ker q(\phi)$ oraz w konsekwencji: $V = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

- Zauważmy, że endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ ma zerowe jądro.
- W przeciwnym razie mamy wektor $\alpha \in \ker q(\phi)$, który zeruje się jednocześnie na $(\phi - a\,\mathrm{id})^t$, a z udowodnionego twierdzenia mamy $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \cap \ker q(\phi) = \{0\}$.

Pokazaliśmy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Teraz pokażemy, że $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t = \ker q(\phi)$ oraz w konsekwencji: $V = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

- Zauważmy, że endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ ma zerowe jądro.
- W przeciwnym razie mamy wektor $\alpha \in \ker q(\phi)$, który zeruje się jednocześnie na $(\phi - a\,\mathrm{id})^t$, a z udowodnionego twierdzenia mamy $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \cap \ker q(\phi) = \{0\}$.
- A zatem endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ jest na $\ker q(\phi)$. Skoro zaś $V = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \oplus \ker q(\phi)$, to $(\phi - a\,\mathrm{id})^t$ jest na $\ker q(\phi)$.

Pokazaliśmy $V_{[a]} = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t$. Teraz pokażemy, że $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t = \ker q(\phi)$ oraz w konsekwencji: $V = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t$,

- Zauważmy, że endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ ma zerowe jądro.
- W przeciwnym razie mamy wektor $\alpha \in \ker q(\phi)$, który zeruje się jednocześnie na $(\phi - a\,\mathrm{id})^t$, a z udowodnionego twierdzenia mamy $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \cap \ker q(\phi) = \{0\}$.
- A zatem endomorfizm $(\phi - a\,\mathrm{id})^t|_{\ker q(\phi)}$ jest na $\ker q(\phi)$. Skoro zaś $V = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \oplus \ker q(\phi)$, to $(\phi - a\,\mathrm{id})^t$ jest na $\ker q(\phi)$.
- Zatem
$$V = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^t \oplus \ker q(\phi) = V_{[a]} \oplus \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^t.$$

Dowodzimy $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$ oraz $\dim V_{[a]} = t$.

Dowodzimy $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$ oraz $\dim V_{[a]} = t$.

- Mamy rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_{[a]} \oplus \ker q(\phi)$, a więc

$$w_\phi = w_{\phi|_{V_{[a]}}} \cdot w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}.$$

Dowodzimy $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$ oraz $\dim V_{[a]} = t$.

- Mamy rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_{[a]} \oplus \ker q(\phi)$, a więc
$$w_\phi = w_{\phi|_{V_{[a]}}} \cdot w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}.$$
- Zauważmy, że czynnik $(\lambda - a)$ nie może występować w rozkładzie $w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}$, bo to by znaczyło, że w $\ker q(\phi)$ jest wektor własny o wartości własnej a.

Dowodzimy $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$ oraz $\dim V_{[a]} = t$.

- Mamy rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_{[a]} \oplus \ker q(\phi)$, a więc
$$w_\phi = w_{\phi|_{V_{[a]}}} \cdot w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}.$$
- Zauważmy, że czynnik $(\lambda - a)$ nie może występować w rozkładzie $w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}$, bo to by znaczyło, że w $\ker q(\phi)$ jest wektor własny o wartości własnej a.
- Zatem z tw. o jednoznaczności rozkładu w $K[\lambda]$ mamy:
$$w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t.$$

Dowodzimy $w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t$ oraz $\dim V_{[a]} = t$.

- Mamy rozkład ϕ-niezmienniczy $V = V_{[a]} \oplus \ker q(\phi)$, a więc
$$w_\phi = w_{\phi|_{V_{[a]}}} \cdot w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}.$$
- Zauważmy, że czynnik $(\lambda - a)$ nie może występować w rozkładzie $w_{\phi|_{\ker q(\phi)}}$, bo to by znaczyło, że w $\ker q(\phi)$ jest wektor własny o wartości własnej a.
- Zatem z tw. o jednoznaczności rozkładu w $K[\lambda]$ mamy:
$$w_{\phi|_{V_{[a]}}}(\lambda) = (\lambda - a)^t.$$
- Stopień wielomianu charakterystycznego endomorfizmu przestrzeni V to wymiar tej przestrzeni, stąd (4):
$$\dim V_{[a]} = t.$$

Wniosek - twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V – skończenie wymiarowa nad ciałem K. Jeśli

$$w_\phi(\lambda) = (a_1 - \lambda)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (a_k - \lambda)^{t_k},$$

gdzie $a_i \neq a_j$, dla $i \neq j$, to

(1) $V_{[a_j]} = \ker(\phi - a_j \,\mathrm{id})^{t_j}$.

(2) $V = V_{[a_1]} \oplus \ldots \oplus V_{[a_k]}$.

(3) $\mathrm{im}((\phi - a_j \,\mathrm{id})^{t_j}) = \bigoplus_{i \neq j} V_{[a_i]}$

(4) $w_{\phi|_{V_{[a_j]}}}(\lambda) = (a_j - \lambda)^{t_j}$,

(5) $\dim V_{[a_j]} = t_j$.

Wniosek

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V – skończenie wymiarowa nad ciałem K. Jeśli

$$w_\phi(\lambda) = (a_1 - \lambda)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (a_k - \lambda)^{t_k},$$

gdzie $a_i \neq a_j$, dla $i \neq j$, to istnieje baza $\mathcal{P}$ przestrzeni V, w której macierz $M(\phi)_\mathcal{P}^\mathcal{P}$ ma postać blokowo diagonalną:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A_i \in M_{t_i}(K),$$

przy czym A_i jest macierzą $\phi|_{V_{[a_i]}}$ w bazie $V_{[a_i]} \cap \mathcal{P}$.

Wniosek

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V – skończenie wymiarowa nad ciałem K. Jeśli

$$w_\phi(\lambda) = (a_1 - \lambda)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (a_k - \lambda)^{t_k},$$

gdzie $a_i \neq a_j$, dla $i \neq j$, to istnieje baza $\mathcal{P}$ przestrzeni V, w której macierz $M(\phi)^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}$ ma postać blokowo diagonalną:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A_i \in M_{t_i}(K),$$

przy czym A_i jest macierzą $\phi|_{V_{[a_i]}}$ w bazie $V_{[a_i]} \cap \mathcal{P}$.

Problem: jakie są możliwe postaci macierzy A_i, w zależności od wyboru $\mathcal{P}$?

Definicja

Klatką Jordana o wartości własnej a i rozmiarze n nazywamy macierz kwadratową postaci $M = [a]$, gdy $n = 1$ oraz:

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \in M_n(K),$$

gdy $n > 1$. Innymi słowy $M = [m_{ij}]$, gdzie:

$$m_{ij} = \begin{cases} a & , i = j \\ 1 & , j = i + 1 \\ 0 & , \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Definicja

Mówimy, że macierz $A \in M_n(K)$ jest w **postaci Jordana**, jeśli jest w postaci blokowo diagonalnej

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix},$$

gdzie każda z macierzy $A_j \in M_{r_j}(K)$ jest klatką Jordana.

Definicja

Mówimy, że macierz $A \in M_n(K)$ jest w **postaci Jordana**, jeśli jest w postaci blokowo diagonalnej

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix},$$

gdzie każda z macierzy $A_j \in M_{r_j}(K)$ jest klatką Jordana.

Nasz cel - twierdzenie Jordana

Jeżeli endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest triangularyzowalny nad ciałem K to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V zwana **bazą Jordana**, w której macierz ϕ ma postać Jordana. W szczególności jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, wówczas każdy endomorfizm przestrzeni V jest w pewnej bazie w postaci Jordana.

Dowód twierdzenia Jordana opiera się na następujących elementach:

Dowód twierdzenia Jordana opiera się na następujących elementach:

- Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe $V_{[a_i]}$ odpowiadające wartościom własnym endomorfizmu ϕ (już to mamy).

Dowód twierdzenia Jordana opiera się na następujących elementach:

- Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe $V_{[a_i]}$ odpowiadające wartościom własnym endomorfizmu ϕ (już to mamy).
- Znalezienie bazy przestrzeni $V_{[a_i]}$, w której endomorfizm $\phi|_{V_{[a_i]}}$ ma postać Jordana złożoną z klatek odpowiadających wartości własnej a_i.

Dowód twierdzenia Jordana opiera się na następujących elementach:

- Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe $V_{[a_i]}$ odpowiadające wartościom własnym endomorfizmu ϕ (już to mamy).
- Znalezienie bazy przestrzeni $V_{[a_i]}$, w której endomorfizm $\phi|_{V_{[a_i]}}$ ma postać Jordana złożoną z klatek odpowiadających wartości własnej a_i.

Okaże się, że również, że dwie *istotnie różne* macierze w postaci Jordana (nie da się uzyskać jednej z drugiej przez zmianę kolejności klatek) nie są podobne. To nam da klasyfikację macierzy kwadratowych z dokładnością do podobieństwa nad ciałami algebraicznie domkniętymi i szereg dodatkowych kryteriów. Po prawej - Camille Jordan (1838-1922).

jordan-eps-converted-to.pdf

Interesuje nas zatem opis endomorfizmów $\phi \in \mathrm{End}(V)$ o wielomianie charakterystycznym postaci $w_\phi(\lambda) = (a - \lambda)^n$, gdzie $a \in K$.

Interesuje nas zatem opis endomorfizmów $\phi \in \mathrm{End}(V)$ o wielomianie charakterystycznym postaci $w_\phi(\lambda) = (a - \lambda)^n$, gdzie $a \in K$.

Uwaga (sprowadzenie problemu do przypadku $a = 0$)

Macierz M jest macierzą endomorfizmu ϕ w bazie $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - aI$ jest macierzą endomorfizmu $\phi - a\,\mathrm{id}$ w bazie $\mathcal{A}$. Co więcej $w_\phi(\lambda) = (a - \lambda)^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w_{\phi - a\,\mathrm{id}}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.

Interesuje nas zatem opis endomorfizmów $\phi \in \mathrm{End}(V)$ o wielomianie charakterystycznym postaci $w_\phi(\lambda) = (a-\lambda)^n$, gdzie $a \in K$.

Uwaga (sprowadzenie problemu do przypadku $a = 0$)

Macierz M jest macierzą endomorfizmu ϕ w bazie $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M - aI$ jest macierzą endomorfizmu $\phi - a\,\mathrm{id}$ w bazie $\mathcal{A}$. Co więcej $w_\phi(\lambda) = (a-\lambda)^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w_{\phi - a\,\mathrm{id}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$.

Przykład. Jeśli $\phi \in End(\mathbb{C}^4)$ oraz $w_\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-4)^2$, to w celu opisu przestrzeni $V_{[1]}$ rozważamy endomorfizm $\phi - \mathrm{id}$, który ograniczony do tej podprzestrzeni jest w kwadracie zerowy, czyli $(\phi - \mathrm{id})^2|_{V_{[1]}} = 0$, np. dla $M(\phi)_{st}^{st} = (x_1 + x_2, x_2, 4x_3 + x_4, 4x_4)$ mamy $V_{[1]} = \mathrm{lin}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ oraz:

$$M(\phi - id)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad M((\phi - id)^2)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze

$$\phi^k = 0.$$

Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze

$$\phi^k = 0.$$

Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

- Ćwiczenie: każda macierz kwadratowa ściśle górnotrójkątna jest nilpotentna.

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze

$$\phi^k = 0.$$

Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

- Ćwiczenie: każda macierz kwadratowa ściśle górnotrójkątna jest nilpotentna.
- Każdy endomorfizm nilpotentny ma wartość własną 0 i jest to jedyna możliwa wartość własna endomorfizmu ϕ.

Definicja

Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nazywamy **nilpotentnym**, jeśli istnieje liczba całkowita dodatnia k taka, ze

$$\phi^k = 0.$$

Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy **stopniem nilpotentności** ϕ. Macierz $A \in M_n(K)$ nazywamy nilpotentną indeksu k, jeśli $A^k = 0$ oraz $A^{k-1} \neq 0$.

- Ćwiczenie: każda macierz kwadratowa ściśle górnotrójkątna jest nilpotentna.
- Każdy endomorfizm nilpotentny ma wartość własną 0 i jest to jedyna możliwa wartość własna endomorfizmu ϕ.
- Dla endomorfizmu nilpotentnego ϕ stopnia k przestrzeni n-wymiarowej mamy $w_\phi(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n$ (bo $m_\phi(\lambda) = \lambda^k$).

Kluczowy przykład. Jeśli $\dim V = n$ oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny stopnia n to istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $V = V_\alpha$ jest podprzestrzenią cykliczną oraz V ma bazę

$$\mathcal{A} = \{\phi^{n-1}(\alpha), \phi^{n-2}(\alpha), \dots, \phi(\alpha), \alpha\},$$

w której $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest klatką Jordana rozmiaru n odpowiadającą wartości własnej 0, czyli macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K). \qquad (*)$$

Kluczowy przykład. Jeśli $\dim V = n$ oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny stopnia n to istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $V = V_\alpha$ jest podprzestrzenią cykliczną oraz V ma bazę

$$\mathcal{A} = \{\phi^{n-1}(\alpha), \phi^{n-2}(\alpha), \ldots, \phi(\alpha), \alpha\},$$

w której $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest klatką Jordana rozmiaru n odpowiadającą wartości własnej 0, czyli macierzą postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K). \qquad (*)$$

Naszym celem jest pokazanie, że każdy endomorfizm nilpotentny ϕ przestrzeni skończenie wymiarowej V zadaje rozkład ϕ-niezmienniczy na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych, a zatem w pewnej bazie ϕ ma macierz blokowo-diagonalną o klatkach postaci $(*)$.

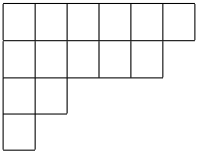
Endomorfizm nilpotentny może być bardziej skomplikowany, np. dany macierzą

$$\begin{bmatrix}
0&1&0&0&&&&&&&&&&&&\\
0&0&1&0&&&&&&&&&&&&\\
0&0&0&1&&&&&&&&&&&&\\
0&0&0&0&&&&&&&&&&&&\\
&&&&0&1&0&&&&&&&&&\\
&&&&0&0&1&&&&&&&&&\\
&&&&0&0&0&&&&&&&&&\\
&&&&&&&0&&&&&&&&\\
&&&&&&&&0&1&0&&&&&\\
&&&&&&&&0&0&1&&&&&\\
&&&&&&&&0&0&0&&&&&\\
&&&&&&&&&&&0&1&0&&\\
&&&&&&&&&&&0&0&1&&\\
&&&&&&&&&&&0&0&0&&\\
&&&&&&&&&&&&&&0&1\\
&&&&&&&&&&&&&&0&0
\end{bmatrix}$$

Kombinatoryczny wtręt, który się przyda

Przez **podział** λ nieujemnej liczby całkowitej n rozumiemy ciąg $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ dodatnich liczb całkowitych λ_i, które nazywamy **blokami**, spełniającymi warunki: $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$ oraz $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$.

Geometryczną reprezentacją podziału λ jest diagram złożony z r wierszy, gdzie i-ty wiersz ma λ_i elementów, np. dla podziału $(6, 5, 2, 1)$ liczby 14 jest to:



Uwaga. Diagramy te mają ważną rolę w algebrze i kombinatoryce (np. w teorii reprezentacji) i nazywają się **tableaux Younga**. Do tych diagramów będziemy wpisywać bazy, w których endomorfizm nilpotentny ma odpowiednią postać).

Pojęcia pomocnicze

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n o bazie $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz niech $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ będzie podziałem liczby n. **Podziałem bazy** $\mathcal{A}$ nazywamy ciąg $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r)$, przy czym jeśli $\lambda_0 = 0$, to zbiór $\mathcal{A}_i$, nazywany ***i*-tym blokiem bazy** $\mathcal{A}$ **w podziale** λ, złożony jest z λ_i wektorów:

$$\alpha_{\lambda_0+\ldots+\lambda_{i-1}+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_i}.$$

Pojęcia pomocnicze

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n o bazie $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz niech $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ będzie podziałem liczby n. **Podziałem bazy** $\mathcal{A}$ nazywamy ciąg $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r)$, przy czym jeśli $\lambda_0 = 0$, to zbiór $\mathcal{A}_i$, nazywany ***i*-tym blokiem bazy** $\mathcal{A}$ **w podziale** λ, złożony jest z λ_i wektorów:

$$\alpha_{\lambda_0+\ldots+\lambda_{i-1}+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_i}.$$

Rozkład

$$V = \mathrm{lin}(\mathcal{A}_1) \oplus \mathrm{lin}(\mathcal{A}_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{lin}(\mathcal{A}_r)$$

nazwiemy **rozkładem** V **zgodnym z podziałem** λ bazy $\mathcal{A}$ o blokach $\mathrm{lin}(\mathcal{A}_i)$. Każdy rozkład tego typu nazywamy **rozkładem** V **pochodzącym od bazy** $\mathcal{A}$.

Przypomnienie

Niech V będzie wymiaru n nad ciałem K. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Niech $\mathcal{A}$ będzie taką bazą V oraz $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ takim podziałem n, że rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ pochodzący od podziału $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r)$ jest ϕ-niezmienniczy. Wówczas macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać **blokowo-diagonalną**

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_r \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A_i \in M_{\lambda_i}(K), \qquad (*)$$

Definicja - ustalenie notacji

Macierz blokowo-diagonalna postaci $(*)$ zapisujemy jako $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r)$, zaś blok A_i nazywamy i-tą **klatką** $(*)$ rozmiaru λ_i.

Twierdzenie Jordana - przypadek nilpotentny

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest n wymiarowa nad ciałem K. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest nilpotentne,

(2) $\phi^n = 0$,

(3) ϕ jest w pewnej bazie V opisane macierzą ściśle górnotrójkątną,

(4) ϕ jest w pewnej bazie V opisane macierzą blokowo-diagonalną o klatkach Jordana odpowiadających wartości własnej 0 postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{s_i}(K).$$

Twierdzenie Jordana - przypadek nilpotentny

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest n wymiarowa nad ciałem K. Następujące warunki są równoważne:

(1) ϕ jest nilpotentne,

(2) $\phi^n = 0$,

(3) ϕ jest w pewnej bazie V opisane macierzą ściśle górnotrójkątną,

(4) ϕ jest w pewnej bazie V opisane macierzą blokowo-diagonalną o klatkach Jordana odpowiadających wartości własnej 0 postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{s_i}(K).$$

Jedyną nietrywialną implikacją jest (1) $\Rightarrow$ (4) (patrz wcześniejsze *ćwiczenia*). Udowodnimy ją pokazując następujące twierdzenie.

Twierdzenie Jordana - przypadek nilpotentny

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie nilpotentny stopnia q, gdzie V jest n wymiarowa nad ciałem K. Wówczas istnieje podział $\lambda = (\underbrace{q, \ldots, q}_{n_q}, \underbrace{q-1, \ldots, q-1}_{n_{q-1}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1})$

liczby n oraz wektory

$$e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q,$$

że dla każdych $1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k$ układ $\mathcal{B} = (\mathcal{B})_{lk}$, gdzie

$$\mathcal{B}_{lk} = \{\phi^{k-1}(e_l^{(k)}), \phi^{k-2}(e_l^{(k)}), \ldots, \phi(e_l^{(k)}), e_l^{(k)}\}$$

jest bazą Jordana przestrzeni V o podziale λ, przy czym:

$$V = \bigoplus_{1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k} \mathrm{lin}(\mathcal{B}_{lk}) = \bigoplus_{1 \leq k \leq q, 1 \leq l \leq n_k} V_{e_l^{(k)}}$$

oraz macierz ϕ ograniczonego do $V_{e_l^{(k)}}$ to klatka Jordana rozmiaru k.

Skad się biorą te $e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \le k \le q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \dots, e_{n_q}^{(q)}$.

Skad się biorą te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.

Skad się biorą te $e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \dots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \dots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.

Skad się biorą te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.
- Podprzestrzenie $V_{e_i^{(q-1)}}$ są wymiaru $q-1$ i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q-1)}}}$ to jedna z n_{q-1} klatek Jordana rozmiaru $q-1$.

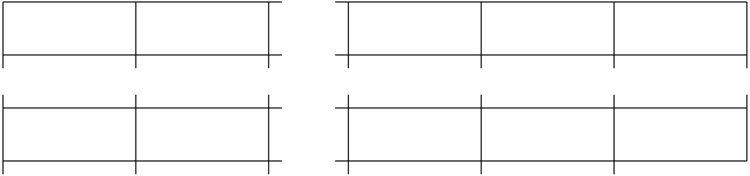
Skad się biorą te $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)} \in V, \quad 1 \leq k \leq q$?

- Zacznijmy od końca. Rozważmy maksymalny liniowo niezależny układ wektorów w V, które zeruje tylko ϕ^q, ale nie zeruje ϕ^{q-1} (najbardziej odporne na działanie ϕ). Niech tych wektorów będzie n_q i nazwijmy je $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$.
- Podprzestrzenie cykliczne $V_{e_i^{(q)}}$ są wymiaru q i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q)}}}$ to jedna z n_q klatek Jordana rozmiaru q.
- Aby konstruować dalej bazę Jordana wybieramy najbardziej odporne z niewybranych dotąd wektorów (ani podprzestrzeni rozpiętych przez nie). A zatem bierzemy maksymalny układ, który nie należy do sumy $V_{e_i^{(q)}}$, który zeruje się na ϕ^{q-1}, ale nie zeruje się na ϕ^{q-2}. Tych wektorów jest n_{q-1}, i jeśli jest to liczba niezerowa, nazywamy je $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$.
- Podprzestrzenie $V_{e_i^{(q-1)}}$ są wymiaru $q-1$ i twierdzimy, że w naturalnych bazach tych przestrzeni $\phi|_{V_{e_i^{(q-1)}}}$ to jedna z n_{q-1} klatek Jordana rozmiaru $q-1$.
- Itd. Zobaczmy jak to pokazać na diagramie Younga.

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

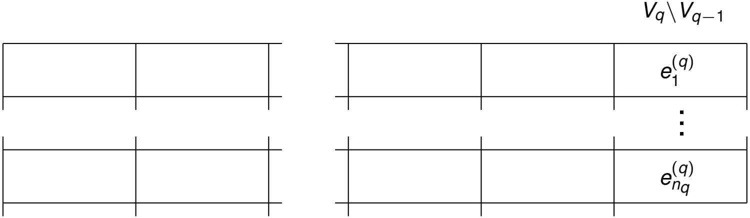
(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.



Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.

(2q) W pola najbardziej na prawo wpisz układ $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$ dopełniający bazę V_{q-1} do bazy V_q.



Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.

(2q) W pola najbardziej na prawo wpisz układ $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$ dopełniający bazę V_{q-1} do bazy V_q.

(3q) Uzupełnij: jeśli w pewnym polu stoi x, po lewej wpisz $\phi(x)$.

			$V_{q-1}\setminus V_{q-2}$	$V_q\setminus V_{q-1}$
			$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
			$\vdots$	$\vdots$
			$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.

(2q) W pola najbardziej na prawo wpisz układ $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$ dopełniający bazę V_{q-1} do bazy V_q.

(3q) Uzupełnij: jeśli w pewnym polu stoi x, po lewej wpisz $\phi(x)$.

			$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
			$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$\phi^2(e_{nq}^{(q)})$	$\phi(e_{nq}^{(q)})$	$e_{nq}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.

(2q) W pola najbardziej na prawo wpisz układ $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$ dopełniający bazę V_{q-1} do bazy V_q.

(3q) Uzupełnij: jeśli w pewnym polu stoi x, po lewej wpisz $\phi(x)$.

	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q) Narysuj diagram Younga podziału λ zaczynając od n_q wierszy z q polami.

(2q) W pola najbardziej na prawo wpisz układ $e_1^{(q)}, \ldots, e_{n_q}^{(q)}$ dopełniający bazę V_{q-1} do bazy V_q.

(3q) Uzupełnij: jeśli w pewnym polu stoi x, po lewej wpisz $\phi(x)$.

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

W tych n_q wierszach wypisano bazy $V_{e_i^{(q)}}$, w których n_q ograniczeń ϕ ma macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in M_q(K).$$

Jest to fragment szukanej bazy Jordana $\mathcal{B}$.

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\ldots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\ldots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-1) Rozważ kolejne n_{q-1} wierszy.

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-1) Rozważ kolejne n_{q-1} wierszy.

(2q-1) W pola $q-1$-wszej kolumny wpisz $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$, tzn. układ wektorów dopełniający bazę V_{q-2} oraz elementy wpisane wyżej do kolumny $q-1$ do bazy V_{q-1}. Potem...

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
				$e_1^{(q-1)}$	
				$\vdots$	
				$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-1) Rozważ kolejne n_{q-1} wierszy.

(2q-1) W pola $q-1$-wszej kolumny wpisz $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$, tzn. układ wektorów dopełniający bazę V_{q-2} oraz elementy wpisane wyżej do kolumny $q-1$ do bazy V_{q-1}. Potem...

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\ldots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\ldots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
			$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
			$\vdots$	$\vdots$	
			$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-1) Rozważ kolejne n_{q-1} wierszy.

(2q-1) W pola $q-1$-wszej kolumny wpisz $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$, tzn. układ wektorów dopełniający bazę V_{q-2} oraz elementy wpisane wyżej do kolumny $q-1$ do bazy V_{q-1}. Potem...

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-1) Rozważ kolejne n_{q-1} wierszy.

(2q-1) W pola $q-1$-wszej kolumny wpisz $e_1^{(q-1)}, \ldots, e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$, tzn. układ wektorów dopełniający bazę V_{q-2} oraz elementy wpisane wyżej do kolumny $q-1$ do bazy V_{q-1}. Potem...

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker\phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker\phi \subseteq \ker\phi^2 \ldots \subseteq \ker\phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

W tych n_{q-1} wierszach wypisano bazy $V_{e_i^{(q-1)}}$, w których n_{q-1} ograniczeń ϕ ma klatki rozmiarów $q-1$. Jest to następny fragment szukanej bazy Jordana $\mathcal{B}$.

$V_1 = \ker\phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$. Konstrukcja bazy $\mathcal{B}$.

(1q-k) W k-tym kroku weź nowe n_k wierszy.

(2q-k) W wolne pola $q-k$-tej kolumny wpisz $e_1^{(k)}, \ldots, e_{n_k}^{(k)}$, tzn. układ dopełniający bazę V_{q-k-1} oraz elementy wpisane wyżej do kolumny $q-k$ do bazy V_{q-k}. Potem...

$V_1 = \ker \phi$	$V_2 \setminus V_1$		$V_{q-2} \setminus V_{q-3}$	$V_{q-1} \setminus V_{q-2}$	$V_q \setminus V_{q-1}$
$\phi^{q-1}(e_1^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_1^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_1^{(q)})$	$\phi(e_1^{(q)})$	$e_1^{(q)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\phi^{q-1}(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi^{q-2}(e_{n_q}^{(q)})$	$\cdots$	$\phi^2(e_{n_q}^{(q)})$	$\phi(e_{n_q}^{(q)})$	$e_{n_q}^{(q)}$
$\phi^{q-2}(e_1^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_1^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_1^{(q-1)})$	$e_1^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\phi^{q-2}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\phi^{q-3}(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$\cdots$	$\phi(e_{n_{q-1}}^{(q-1)})$	$e_{n_{q-1}}^{(q-1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		

Ilustracja treści twierdzenia. Skoro ϕ jest nilpotentny stopnia q oraz $V_i = \ker \phi^i$, dla $1 \leq i \leq q$, to mamy $\{0\} \subseteq \ker \phi \subseteq \ker \phi^2 \ldots \subseteq \ker \phi^q = V$.

A zatem zamierzamy skonstruować bazę Jordana endomorfizmu nilpotentnego poprzez odpowiednie uzupełnianie w kolejnych krokach nieuzupełnionych n_k wierszy (poczynając od ostatniej kolumny) diagramu Younga związanego z podziałem:

$$\lambda = (\underbrace{q, \ldots, q}_{n_q}, \underbrace{q-1, \ldots, q-1}_{n_{q-1}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1}),$$

bazami przestrzeni cyklicznych rozpiętych przez układy wektorów ze zbiorów $V_k \setminus V_{k-1}$, które nie są w przestrzeniach skonstruowanych w poprzednich krokach.

Jest jasne, że prowadząc konstrukcję opisaną wyżej dostajemy fragmenty bazy Jordana. Można tę konstrukcję opisać elementarnie, choćby indukcyjnie, jak w skrypcie [TK], albo w ogóle dowodzić TJ bez konstrukcji bazy, ale skorzystamy z okazji, by zilustrować pojęcie przestrzeni ilorazowej. Przykłady wyznaczania baz: `https://mimuw.edu.pl/~amecel/2020l/Gal2/gal2wyklad6.pdf`.