# Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

**WYKŁAD 3, 09.03.2021 r.**

## Przypomnienie

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Podprzestrzeń $U \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią niezmienniczą** względem $\phi$, albo po prostu **$\phi$-niezmienniczą**, jeśli

$$\phi(U) \subseteq U.$$

Jeśli $V$ – skończenie wymiarowa nad $K$ oraz $U \subseteq V$ jest $\phi$-niezmiennicza, to macierz $\phi$ w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $V$ składającej się najpierw z wektorów bazowych $U$ ma postać blokowo-górnotrójkątną:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A \in M_{\dim U}(K).$$

Jeśli $\phi|_U : U \to U$ jest **ograniczeniem** $\phi$ do $U$, czyli

$$\phi|_U(u) := \phi(u) \in U, \quad \forall_{u \in U},$$

to $A$ jest macierzą $\phi|_U$, czyli $w_{\phi|_U}(\lambda)$ jest dzielnikiem $w_\phi(\lambda)$.

## Przypomnienie

Niech $\phi$ będzie endomorfizmem $n$ wymiarowej przestrzeni liniowej $V$ nad ciałem $K$. Następujące warunki są równoważne:

(1) wielomian charakterystyczny $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe,

(2) przekształcenie $\phi$ ma w pewnej bazie macierz górnotrójkątną,

(3) istnieje wstępujący łańcuch $n+1$ podprzestrzeni niezmienniczych w $V$.

**Uwaga.** Nad ciałem algebraicznie domkniętym każdy endomorfizm spełnia (1)-(3).

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Niech $V$ będzie sumą prostą postaci

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \qquad (*).$$

Powiemy, że **rozkład** $(*)$ **jest** $\phi$**-niezmienniczy**, jeśli każda z podprzestrzeni $V_i$ jest $\phi$-niezmiennicza.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Niech $V$ będzie sumą prostą postaci

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \qquad (*).$$

Powiemy, że **rozkład** $(*)$ **jest** $\phi$**-niezmienniczy**, jeśli każda z podprzestrzeni $V_i$ jest $\phi$-niezmiennicza.

Przykłady:

- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest rzutem, to rozkład $V = \ker(\phi) \oplus \mathrm{im}(\phi)$ jest $\phi$-niezmienniczy,
- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest diagonalizowalny, to rozkład $V$ na sumę prostą podprzestrzeni własnych jest $\phi$-niezmienniczy.

### Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Niech $V$ będzie sumą prostą postaci

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \qquad (*).$$

Powiemy, że **rozkład** $(*)$ **jest $\phi$-niezmienniczy**, jeśli każda z podprzestrzeni $V_i$ jest $\phi$-niezmiennicza.

Przykłady:

- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest rzutem, to rozkład $V = \ker(\phi) \oplus \mathrm{im}(\phi)$ jest $\phi$-niezmienniczy,
- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest diagonalizowalny, to rozkład $V$ na sumę prostą podprzestrzeni własnych jest $\phi$-niezmienniczy.

**Kluczowa idea.** Jeśli znajdziemy rozkład $\phi$-niezmienniczy $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, to badanie działania $\phi$ na $V$ sprowadza się do badania *działań* $\phi$ na każdym z $V_i$.

## Oczywista, ale fundamentalna uwaga

Niech $V$ będzie wymiaru $n$ nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że mamy rozkład $\phi$-niezmienniczy $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$. Istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $V$, że:

(1) macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać **blokowo-diagonalną**

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_r \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A_i \in M_{\dim V_i}(K), \qquad (*)$$

(2) $w_\phi(\lambda) = w_{A_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot w_{A_r}(\lambda)$.

## Oczywista, ale fundamentalna uwaga

Niech $V$ będzie wymiaru $n$ nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że mamy rozkład $\phi$-niezmienniczy $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$. Istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $V$, że:

(1) macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać **blokowo-diagonalną**

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_r \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A_i \in M_{\dim V_i}(K), \qquad (*)$$

(2) $w_\phi(\lambda) = w_{A_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot w_{A_r}(\lambda)$.

Prawdziwy *cud* polega na tym, że odpowiednia rozkładalność wielomianu charakterystycznego gwarantuje rozkłady $\phi$-niezmiennicze. O tym później.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. **Podprzestrzenią cykliczną** przestrzeni $V$ względem $\phi$ rozpiętą przez wektor $\alpha$ nazywamy:

$$V_\alpha = \mathrm{lin}(\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots), \text{ gdzie } \phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{n}.$$

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. **Podprzestrzenią cykliczną** przestrzeni $V$ względem $\phi$ rozpiętą przez wektor $\alpha$ nazywamy:

$$V_\alpha = \mathrm{lin}(\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots), \text{ gdzie } \phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi}_{n}.$$

Przykłady.

- Podprzestrzenie cykliczne względem jednokładności są jednowymiarowe.
- Podprzestrzenie cykliczne względem rzutów/symetrii są wymiaru nie większego niż 2.
- Niech $\phi \in \mathrm{End}(K^n)$ dane jest wzorem:

  $$\phi((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

  Podprzestrzeń cykliczna w $V$ względem $\phi$ rozpięta przez $(1, 1, \ldots, 1)$ to $K^n$.

**Ćwiczenie.** Własności podprzestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ względem $\phi \in \mathsf{End}(V)$.

- $V_\alpha$ jest **najmniejszą względem inkluzji** podprzestrzenią $\phi$-niezmienniczą zawierającą wektor $\alpha$,

**Ćwiczenie.** Własności podprzestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ względem $\phi \in \mathrm{End}(V)$.

- $V_\alpha$ jest **najmniejszą względem inkluzji** podprzestrzenią $\phi$-niezmienniczą zawierającą wektor $\alpha$,
- Jeśli $0 \neq \alpha$, to bazą przestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ jest układ

$$\mathcal{B} = (\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha)) \quad \text{gdzie } k = \dim V_\alpha,$$

**Ćwiczenie.** Własności podprzestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ względem $\phi \in \mathrm{End}(V)$.

- $V_\alpha$ jest **najmniejszą względem inkluzji** podprzestrzenią $\phi$-niezmienniczą zawierającą wektor $\alpha$,
- Jeśli $0 \neq \alpha$, to bazą przestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ jest układ
$$\mathcal{B} = (\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha)) \quad \text{gdzie } k = \dim V_\alpha,$$
- Niech $k = \dim V_\alpha$ oraz niech $c_0, \ldots, c_{k-1} \in K$ spełniają
$$c_0\alpha + c_1\phi(\alpha) + \ldots + c_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha) = 0.$$

**Ćwiczenie.** Własności podprzestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ względem $\phi \in \mathrm{End}(V)$.

- $V_\alpha$ jest **najmniejszą względem inkluzji** podprzestrzenią $\phi$-niezmienniczą zawierającą wektor $\alpha$,
- Jeśli $0 \neq \alpha$, to bazą przestrzeni cyklicznej $V_\alpha$ jest układ
$$\mathcal{B} = (\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha)) \quad \text{gdzie } k = \dim V_\alpha,$$
- Niech $k = \dim V_\alpha$ oraz niech $c_0, \ldots, c_{k-1} \in K$ spełniają
$$c_0\alpha + c_1\phi(\alpha) + \ldots + c_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha) = 0.$$
Wówczas
$$M(\phi|_{V_\alpha})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$
Co więcej: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$.

### Definicja

Niech $f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k \in K[\lambda]$ będzie **wielomianem monicznym**. Macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

nazywać będziemy **macierzą towarzyszącą** wielomianu $f$ i oznaczać $C(f(\lambda))$.

**Uwaga.** Macierzą towarzyszącą wielomianu $f(\lambda)$ nazywamy też często macierz transponowaną do $(*)$. Oczywiście ich wielomiany charakterystyczne są identyczne i co do znaku równe $f(\lambda)$. Zobaczmy przykład ich zastosowania.

**Wtrącenie.** Definiujemy liniowy ciąg rekurencyjny $(X_n) \in K^\infty$ rzędu $k$ warunkami:

**Wtrącenie.** Definiujemy liniowy ciąg rekurencyjny $(X_n) \in K^\infty$ rzędu $k$ warunkami:

- $X_0, \ldots, X_{k-1} \in K$ – dane,
- dla $n \geq k$ mamy liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in K$, dla których:

$$X_n + c_{k-1}X_{n-1} + \ldots + c_0X_{n-k} = 0, \quad \text{dla } n \geq k.$$

**Wtrącenie.** Definiujemy liniowy ciąg rekurencyjny $(X_n) \in K^\infty$ rzędu $k$ warunkami:

- $X_0, \ldots, X_{k-1} \in K$ – dane,
- dla $n \geq k$ mamy liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in K$, dla których:

$$X_n + c_{k-1} X_{n-1} + \ldots + c_0 X_{n-k} = 0, \qquad \text{dla } n \geq k.$$

Wówczas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_{k-1} \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

**Wtrącenie.** Definiujemy liniowy ciąg rekurencyjny $(X_n) \in K^\infty$ rzędu $k$ warunkami:

- $X_0, \ldots, X_{k-1} \in K$ – dane,
- dla $n \geq k$ mamy liczby $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in K$, dla których:

$$X_n + c_{k-1}X_{n-1} + \ldots + c_0 X_{n-k} = 0, \quad \text{dla } n \geq k.$$

Wówczas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_{k-1} \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

A zatem macierz *kontrolująca* tą rekurencję to $(M(\phi|_{V_\alpha})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^T$. Jeśli macierz ta nie jest diagonalizowalna, to podnoszenie jej do potęgi $n$ wymaga nowych wyników.

## Przypomnienie

Niech $w \in K[\lambda]$ będzie postaci $a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$. Niech $\phi \in \operatorname{End}(V)$, gdzie $V$ jest nad ciałem $K$ oraz niech $A \in M_s(K)$. Definiujemy:

- $w(\phi) = a_0 \cdot \operatorname{id} + a_1 \cdot \phi + \ldots + a_n \cdot \phi^n \in \operatorname{End}(V)$,
- $w(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in M_s(A)$.

### Przypomnienie

Niech $w \in K[\lambda]$ będzie postaci $a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ jest nad ciałem $K$ oraz niech $A \in M_s(K)$. Definiujemy:

- $w(\phi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \cdot \phi + \ldots + a_n \cdot \phi^n \in \mathrm{End}(V)$,
- $w(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in M_s(A)$.

**Ćwiczenie.** Dla $w, v, z \in K[\lambda]$ mamy $w = v + z$, to $w(\phi) = v(\phi) + z(\phi)$, a jeśli $w = v \cdot z$, to $w(\phi) = v(\phi) \cdot z(\phi) = z(\phi) \cdot v(\phi)$ (ta przemienność jest kluczowa).

## Przypomnienie

Niech $w \in K[\lambda]$ będzie postaci $a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ jest nad ciałem $K$ oraz niech $A \in M_s(K)$. Definiujemy:

- $w(\phi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \cdot \phi + \ldots + a_n \cdot \phi^n \in \mathrm{End}(V)$,
- $w(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in M_s(A)$.

**Ćwiczenie.** Dla $w, v, z \in K[\lambda]$ mamy $w = v + z$, to $w(\phi) = v(\phi) + z(\phi)$, a jeśli $w = v \cdot z$, to $w(\phi) = v(\phi) \cdot z(\phi) = z(\phi) \cdot v(\phi)$ (ta przemienność jest kluczowa).

## Algebra endomorfizmu

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ jest nad ciałem $K$. Podprzestrzeń

$$V_\phi = \{w(\phi) \mid w \in K[\lambda]\} \subseteq \mathrm{End}(V)$$

nazywamy **algebrą endomorfizmu** $\phi$.

**Definicja**

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

Kilka uwag.

- $\dim V_\phi = \dim \mathrm{lin}\{\phi^k \mid k \geq 0\} \leq (\dim V)^2$, więc $m_\phi(\lambda)$ istnieje.

### Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

Kilka uwag.

- $\dim V_\phi = \dim \mathrm{lin}\{\phi^k \mid k \geq 0\} \leq (\dim V)^2$, więc $m_\phi(\lambda)$ istnieje.
- Jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest (nietrywialnym) rzutem $(\neq 0, \mathrm{id})$ to $m_\phi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

Kilka uwag.

- $\dim V_\phi = \dim \mathrm{lin}\{\phi^k \,|\, k \geq 0\} \leq (\dim V)^2$, więc $m_\phi(\lambda)$ istnieje.
- Jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest (nietrywialnym) rzutem ($\neq 0, \mathrm{id}$) to $m_\phi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$.
- **Ćwiczenie.** Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad $K$. Wówczas dowolny wielomian $p \in K[\lambda]$ o własności $p(\phi) = 0$ jest podzielny przez wielomian minimalny $m_\phi(\lambda)$.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

Jeśli $V = V_\alpha$ jest podprzestrzenią cykliczną, wówczas wielomian minimalny i wielomian charakterystyczny endomorfizmu $\phi$ różnią się co najwyżej znakiem.

### Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

Jeśli $V = V_\alpha$ jest podprzestrzenią cykliczną, wówczas wielomian minimalny i wielomian charakterystyczny endomorfizmu $\phi$ różnią się co najwyżej znakiem.

Istotnie, niech $\{\phi^{n-1}(\alpha), \ldots, \phi(\alpha), \alpha\}$ będzie bazą $V$. Gdyby wielomian minimalny $m_\phi$ był stopnia mniejszego niż $n$, to by znaczyło, że istnieje kombinacja liniowa wektorów z bazy $V$, która ma współczynniki tego wielomianu, i która jest zerowa. Sprzeczność.

## Definicja

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie $V$ – skończenie wymiarowa nad ciałem $K$. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas wielomian $m \in K[\lambda]$ nazwiemy **wielomianem minimalnym** endomorfizmu $\phi$, ozn. $m_\phi(\lambda)$, jeśli:

- $m(\phi) = 0$,
- nie istnieje niezerowy $r \in K[\lambda]$ taki, że $r(\phi) = 0$ i $\deg(r) < \deg(m)$,
- wyraz wiodący $m$ to 1.

## Twierdzenie(Cayley-Hamilton)

Jeśli $A \in M_n(K)$ oraz $w = w_A(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $A$, to

$$w(A) = 0.$$

Innymi słowy, jeśli $\dim V < \infty$ oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$, to $w_\phi(\phi) = 0$.

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym

$$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym

$$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$

Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $-A^3 + I = 0$, czyli

$$A^3 = I.$$

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym

  $$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$

  Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $-A^3 + I = 0$, czyli

  $$A^3 = I.$$

  A zatem na przykład $A^{1000} = A$.

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym
$$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$
Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $-A^3 + I = 0$, czyli
$$A^3 = I.$$
A zatem na przykład $A^{1000} = A$.
- Odwracanie niektórych macierzy.

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym
$$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$
Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $-A^3 + I = 0$, czyli
$$A^3 = I.$$
A zatem na przykład $A^{1000} = A$.

- Odwracanie niektórych macierzy, np. jeśli wiemy, że macierz odwracalna $A$ ma wielomian charakterystyczny
$$w_A(\lambda) = \lambda^5 + \lambda - 1,$$
to na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $A^5 + A - I = 0$.

Zanim dowód – dwa (trywialne) typy zastosowań.

- Wyznaczanie wysokich potęg niektórych macierzy, np. niech $A$ to macierz $3 \times 3$ o wielomianie charakterystycznym
$$w_A(\lambda) = -\lambda^3 + 1.$$
Na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $-A^3 + I = 0$, czyli
$$A^3 = I.$$
A zatem na przykład $A^{1000} = A$.

- Odwracanie niektórych macierzy, np. jeśli wiemy, że macierz odwracalna $A$ ma wielomian charakterystyczny
$$w_A(\lambda) = \lambda^5 + \lambda - 1,$$
to na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy $A^5 + A - I = 0$. A zatem mnożąc tę równość z dowolnej strony przez $A^{-1}$ dostajemy: $A^4 + I - A^{-1} = 0$. W konsekwencji $A^{-1} = A^4 + I$.

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

- Niech $\phi : V \to V$ będzie takie, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie $\dim(V) = n$. Aby pokazać, że $w_A(A) = 0$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in V$

$$w_A(\phi)(\alpha) = w_\phi(\phi)(\alpha) = 0.$$

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

- Niech $\phi : V \to V$ będzie takie, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie $\mathrm{dim}(V) = n$. Aby pokazać, że $w_A(A) = 0$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in V$
$$w_A(\phi)(\alpha) = w_\phi(\phi)(\alpha) = 0.$$
- Weźmy $0 \neq \alpha \in V$. Rozważamy podprzestrzeń cykliczną $V_\alpha$ wymiaru $k$.

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

- Niech $\phi : V \to V$ będzie takie, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie $\dim(V) = n$. Aby pokazać, że $w_A(A) = 0$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in V$
$$w_A(\phi)(\alpha) = w_\phi(\phi)(\alpha) = 0.$$
- Weźmy $0 \neq \alpha \in V$. Rozważamy podprzestrzeń cykliczną $V_\alpha$ wymiaru $k$.
- Na mocy ćwiczenia istnieją $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$, że
$$0 = a_0\alpha + a_1\phi(\alpha) + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha).$$

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

- Niech $\phi : V \to V$ będzie takie, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$, gdzie $\dim(V) = n$. Aby pokazać, że $w_A(A) = 0$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\alpha \in V$

$$w_A(\phi)(\alpha) = w_\phi(\phi)(\alpha) = 0.$$

- Weźmy $0 \neq \alpha \in V$. Rozważamy podprzestrzeń cykliczną $V_\alpha$ wymiaru $k$.
- Na mocy ćwiczenia istnieją $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$, że

$$0 = a_0\alpha + a_1\phi(\alpha) + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1}(\alpha) + \phi^k(\alpha).$$

- Rozszerzamy bazę $\mathcal{A} = \{\phi^k(\alpha), 0 \leq i \leq k\}$ przestrzeni $V_\alpha$ do bazy $\mathcal{B}$ całego $V$. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem o macierzy przekształcenia mającego podprzestrzeń $\phi$-niezmienniczą mamy

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix},$$

gdzie $X = M(\phi|_{V_\alpha})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$. Co więcej: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda)$ jest dzielnikiem $w_\phi(\lambda)$.

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona cd.

- Na mocy ćwiczenia $X$ jest macierzą towarzyszącą $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda)$, czyli: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$,

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona cd.

- Na mocy ćwiczenia $X$ jest macierzą towarzyszącą $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda)$, czyli: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$,
- A zatem dla pewnego $h \in K[\lambda]$ mamy:

$$\begin{aligned} w_\phi(\lambda) &= (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k) \cdot h(\lambda) = \\ &= h(\lambda) \cdot (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k). \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona cd.

- Na mocy ćwiczenia $X$ jest macierzą towarzyszącą $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda)$, czyli: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$,
- A zatem dla pewnego $h \in K[\lambda]$ mamy:

$$\begin{aligned} w_\phi(\lambda) &= (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k) \cdot h(\lambda) = \\ &= h(\lambda) \cdot (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k). \end{aligned}$$

- Zatem:

$$w_\phi(\phi) = h(\phi)(-1)^k(a_0 \operatorname{id} + a_1\phi + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1} + \phi^k).$$

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona cd.

- Na mocy ćwiczenia $X$ jest macierzą towarzyszącą $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda)$, czyli: $w_{\phi|_{V_\alpha}}(\lambda) = (-1)^k \cdot (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k)$,
- A zatem dla pewnego $h \in K[\lambda]$ mamy:

$$\begin{aligned} w_\phi(\lambda) &= (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k) \cdot h(\lambda) = \\ &= h(\lambda) \cdot (-1)^k(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \lambda^k). \end{aligned}$$

- Zatem:

$$w_\phi(\phi) = h(\phi)(-1)^k(a_0 \operatorname{id} + a_1\phi + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1} + \phi^k).$$

- To jednak oznacza, że na wektorze $\alpha$ mamy:

$$w_\phi(\phi)(\alpha) = h(\phi)(-1)^k(a_0\alpha + a_1\phi + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1} + \phi^k)(\alpha) = h(\phi) \cdot 0 = 0.$$

Dowód twierdzenia Cayleya-Hamiltona jest zakończony.

## Definicja

Niech $K$ bedzie ciałem.

- wielomian $f \in K[x]$ nazywamy **rozkładalnym**, jeśli istnieją $p, q \in K[x]$ stopnia mniejszego niż $f$ takie, że $f(x) = p(x)q(x)$. Niezerowy wielomian, który nie jest rozkładalny nazywamy **nierozkładalnym.**
- **największym wspólnym dzielnikiem** wielomianów $p_1, \ldots, p_n$ nazywamy wielomian najwyższego możliwego stopnia dzielący wszystkie te wielomiany. Jeśli 1 jest największym wspólnym dzielnikiem $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, wówczas mówimy, że wielomiany $p_1, \ldots, p_n$ są **względnie pierwsze.**

**Definicja**

Niech $K$ bedzie ciałem.

- wielomian $f \in K[x]$ nazywamy **rozkładalnym**, jeśli istnieją $p, q \in K[x]$ stopnia mniejszego niż $f$ takie, że $f(x) = p(x)q(x)$. Niezerowy wielomian, który nie jest rozkładalny nazywamy **nierozkładalnym**.
- **największym wspólnym dzielnikiem** wielomianów $p_1, \ldots, p_n$ nazywamy wielomian najwyższego możliwego stopnia dzielący wszystkie te wielomiany. Jeśli 1 jest największym wspólnym dzielnikiem $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$, wówczas mówimy, że wielomiany $p_1, \ldots, p_n$ są **względnie pierwsze**.

**Uwaga.** Istnienie NWD układu wielomianów w $K[x]$ wynika z twierdzenia o dzieleniu z resztą (tak samo, jak istnienie NWD w $\mathbb{Z}$, bo są to tzw. dziedziny Euklidesa), wymagającego założenia, że $K$ jest ciałem. NWD nie jest jednoznaczne, ale z twierdzenia o dzieleniu z resztą wynika, że jest ono wyznaczone z dokładności do stałej. W $\mathbb{Z}[x]$ nie da się podzielić z resztą $x^2 + 1$ przez $2x$. Co ciekawe – w $\mathbb{Z}[x]$ można wyznaczać NWD.

### Twierdzenie o rozkładzie prymarnym

Niech $p \in K[\lambda]$ będzie wielomianem o rozkładzie

$$p = p_1 \dots p_k,$$

gdzie $p_1, \dots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$.
Wówczas ma miejsce rozkład

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker p_k(\phi)$$

na sumę prostą $\phi$-niezmienniczych podprzestrzeni w $V$.

### Twierdzenie o rozkładzie prymarnym

Niech $p \in K[\lambda]$ będzie wielomianem o rozkładzie

$$p = p_1 \dots p_k,$$

gdzie $p_1, \dots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas ma miejsce rozkład

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker p_k(\phi)$$

na sumę prostą $\phi$-niezmienniczych podprzestrzeni w $V$.

**Dwie intuicje.**

- Jeśli $V$ jest sk. wym. nad dowolnym $K$, to dla każdego $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mamy $m_\phi(\phi) = 0$ oraz $w_\phi(\phi) = 0$, czyli $\ker p(\phi) = V$ dla $p = m_\phi(\lambda)$ lub $p = w_\phi(\lambda)$.

## Twierdzenie o rozkładzie prymarnym

Niech $p \in K[\lambda]$ będzie wielomianem o rozkładzie

$$p = p_1 \dots p_k,$$

gdzie $p_1, \dots, p_k$ są czynnikami względnie pierwszymi. Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas ma miejsce rozkład

$$\ker p(\phi) = \ker p_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker p_k(\phi)$$

na sumę prostą $\phi$-niezmienniczych podprzestrzeni w $V$.

**Dwie intuicje.**

- Jeśli $V$ jest sk. wym. nad dowolnym $K$, to dla każdego $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mamy $m_\phi(\phi) = 0$ oraz $w_\phi(\phi) = 0$, czyli $\ker p(\phi) = V$ dla $p = m_\phi(\lambda)$ lub $p = w_\phi(\lambda)$.
- Nawet jeśli $\dim V = \infty$, ale $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia równanie wielomianowe, np. rzut $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia $(\phi^2 - \phi)(\alpha) = 0$, dla $\alpha \in V$, to twierdzenie działa.

Motywacja 1. Podprzestrzenie pierwiastkowe.

Motywacja 1. Podprzestrzenie pierwiastkowe.

- Dla endomorfizmu triangularyzowalnego $\phi \in \mathtt{End}(V)$ o różnych wartościach własnych $a_1, \dots, a_k$ o krotnościach algebraicznych $t_1, \dots, t_k$ mamy

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{t_k}.$$

Motywacja 1. Podprzestrzenie pierwiastkowe.

- Dla endomorfizmu triangularyzowalnego $\phi \in \mathtt{End}(V)$ o różnych wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ o krotnościach algebraicznych $t_1, \ldots, t_k$ mamy
$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{t_k}.$$
Jeśli do tezy twierdzenia podstawimy $p = w_\phi(\lambda)$ oraz $p_i = (\lambda - a_1)^{t_i}$, to:
$$V = \ker(w_\phi(\phi)) = \ker(\phi - a_1 \,\mathrm{id})^{t_1} \oplus \ldots \oplus \ker(\phi - a_1 \,\mathrm{id})^{t_k}.$$

Motywacja 1. Podprzestrzenie pierwiastkowe.

- Dla endomorfizmu triangularyzowalnego $\phi \in \mathrm{End}(V)$ o różnych wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ o krotnościach algebraicznych $t_1, \ldots, t_k$ mamy
$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{t_k}.$$
Jeśli do tezy twierdzenia podstawimy $p = w_\phi(\lambda)$ oraz $p_i = (\lambda - a_1)^{t_i}$, to:
$$V = \ker(w_\phi(\phi)) = \ker(\phi - a_1\,\mathrm{id})^{t_1} \oplus \ldots \oplus \ker(\phi - a_1\,\mathrm{id})^{t_k}.$$
$\phi$ jest diagonalizowalny $\Leftrightarrow$ dla każdego $i$ mamy $\ker(\phi - a_i\,\mathrm{id})^{t_i} = V_{(a_i)}$.
Zwykle jednak tak nie jest i wtedy mamy nowy fundamentalny wynik.

Motywacja 1. Podprzestrzenie pierwiastkowe.

- Dla endomorfizmu triangularyzowalnego $\phi \in \mathrm{End}(V)$ o różnych wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ o krotnościach algebraicznych $t_1, \ldots, t_k$ mamy
$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{t_k}.$$
Jeśli do tezy twierdzenia podstawimy $p = w_\phi(\lambda)$ oraz $p_i = (\lambda - a_1)^{t_i}$, to:
$$V = \ker(w_\phi(\phi)) = \ker(\phi - a_1 \,\mathrm{id})^{t_1} \oplus \ldots \oplus \ker(\phi - a_1 \,\mathrm{id})^{t_k}.$$
$\phi$ jest diagonalizowalny $\Leftrightarrow$ dla każdego $i$ mamy $\ker(\phi - a_i \,\mathrm{id})^{t_i} = V_{(a_i)}$.
Zwykle jednak tak nie jest i wtedy mamy nowy fundamentalny wynik.

**Definicja**

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Dla każdego $a \in K$ przez $V_{[a]}$ oznaczamy podprzestrzeń złożoną ze wszystkich $\alpha \in V$, dla których istnieje $n$ takie, że $(\phi - a\,\mathrm{id})^n(\alpha) = 0$. Przestrzeń $V_{[a]}$ nazywamy **podprzestrzenią pierwiastkową** endomorfizmu $\phi$ lub **uogólnioną podprzestrzenią własną**.

Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno widzieć, że $w_\phi(\lambda) = (1-\lambda)^4$, ale $\phi$ nie jest diagonalizowalny, bo

$$\dim V_{(1)} = \dim \ker(\phi - \mathrm{id}) = 2.$$

Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno widzieć, że $w_\phi(\lambda) = (1-\lambda)^4$, ale $\phi$ nie jest diagonalizowalny, bo

$$\dim V_{(1)} = \dim \ker(\phi - \mathrm{id}) = 2.$$

Z drugiej strony biorąc wektory bazowe $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ mamy:

$$\begin{aligned}
\phi(\epsilon_1) &= \epsilon_1 & &\Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_1) = 0, \\
\phi(\epsilon_2) &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_2) = \epsilon_1 & &\Rightarrow (\phi - \mathrm{id})^2(\epsilon_2) = 0, \\
\phi(\epsilon_3) &= \epsilon_2 + \epsilon_3 \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_3) = \epsilon_2 & &\Rightarrow (\phi - \mathrm{id})^3(\epsilon_3) = 0. \\
\phi(\epsilon_4) &= \epsilon_4 & &\Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_4) = 0.
\end{aligned}$$

Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno widzieć, że $w_\phi(\lambda) = (1-\lambda)^4$, ale $\phi$ nie jest diagonalizowalny, bo

$$\dim V_{(1)} = \dim \ker(\phi - \mathrm{id}) = 2.$$

Z drugiej strony biorąc wektory bazowe $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ mamy:

$$\begin{aligned}
&\phi(\epsilon_1) = \epsilon_1 && \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_1) = 0, \\
&\phi(\epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_2) = \epsilon_1 && \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})^2(\epsilon_2) = 0, \\
&\phi(\epsilon_3) = \epsilon_2 + \epsilon_3 \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_3) = \epsilon_2 && \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})^3(\epsilon_3) = 0. \\
&\phi(\epsilon_4) = \epsilon_4 && \Rightarrow (\phi - \mathrm{id})(\epsilon_4) = 0.
\end{aligned}$$

Zatem $\mathbb{R}^4 = \ker(\phi - \mathrm{id})^3 = V_{[1]}$. Co ciekawe, $\ker(\phi - \mathrm{id})^3$ rozkłada się dalej.

Motywacja 2. Endomorfizmy nietriangularyzowalne.

## Motywacja 2. Endomorfizmy nietriangularyzowalne.

- Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Motywacja 2. Endomorfizmy nietriangularyzowalne.

- Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:
$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Oczywiście jest to macierz towarzysząca, czyli $w_\phi(\lambda) = \lambda^4 + 1$.
A zatem $w_\phi(\lambda)$ nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$.

## Motywacja 2. Endomorfizmy nietriangularyzowalne.

- Rozważmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany macierzą:

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście jest to macierz towarzysząca, czyli $w_\phi(\lambda) = \lambda^4 + 1$.
A zatem $w_\phi(\lambda)$ nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$. Mamy jednak

$$\mathbb{R}^4 = \ker(\phi^4 + \mathrm{id}) = \ker(\phi^2 - 2\phi + 2\,\mathrm{id}) \oplus \ker(\phi^2 + 2\phi + 2\,\mathrm{id}),$$

zatem mimo, że $\phi$ nie jest triangularyzowalny, istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której $\phi$ ma macierz blokowo-diagonalną:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \qquad \text{dla pewnych } A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Oczywista przestroga. Wynik ten nie mówi nic o rozwiązywaniu równań wielomianowych o wyrazach macierzowych.

Oczywista przestroga. Wynik ten nie mówi nic o rozwiązywaniu równań wielomianowych o wyrazach macierzowych.

A zatem biorąc równanie $X^2 - I = 0$ w $M_2(\mathbb{C})$ oczywiście nie mamy prawa powiedzieć, że każde rozwiązanie to kombinacja liniowa macierzy będących rozwiązaniami równań $X - I$ oraz $X + I$. Wszystkie rozwiązania tego równania są bardziej skomplikowane (akurat równanie $X^2 = I$ nauczymy się rozwiązywać nad $\mathbb{C}$). Równania wielomianowe o niewiadomej macierzowej są istotne.

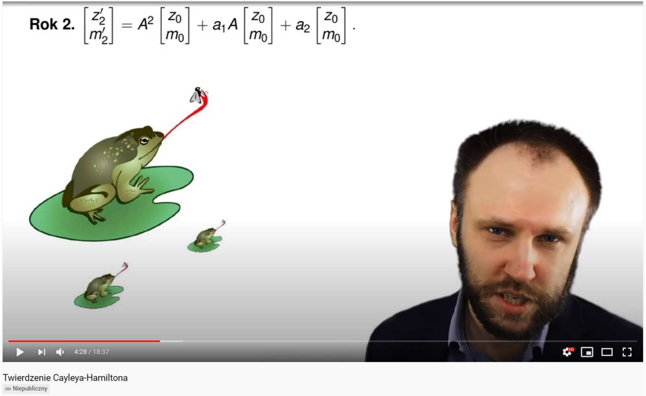
Oczywista przestroga. Wynik ten nie mówi nic o rozwiązywaniu równań wielomianowych o wyrazach macierzowych.

A zatem biorąc równanie $X^2 - I = 0$ w $M_2(\mathbb{C})$ oczywiście nie mamy prawa powiedzieć, że każde rozwiązanie to kombinacja liniowa macierzy będących rozwiązaniami równań $X - I$ oraz $X + I$. Wszystkie rozwiązania tego równania są bardziej skomplikowane (akurat równanie $X^2 = I$ nauczymy się rozwiązywać nad $\mathbb{C}$). Równania wielomianowe o niewiadomej macierzowej są istotne.

Twierdzenie to mówi tylko, że przestrzeń rozwiązań jednorodnego układu $n$ równań z $n$ niewiadomymi o współczynnikach zespolonych danych macierzą $X^2 - I$ jest sumą prostą przestrzeni rozwiązań układów $n$ równań z $n$ niewiadomymi danych macierzami $X - I$ oraz $X + I$. To się może wydaje mało przydatne, ale pokazuje, że w tym twierdzeniu nie musi chodzić o rozkład całego $V$.

# Następnym razem:

- dowód CTR i twierdzenia o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe,
- endomorfizmy nilpotentne i twierdzenie Jordana.




Kogo interesuje dalszy ciąg historii much i żab, i kilka dalszych wątków związanych z tw. Cayleya-Hamiltona zapraszam na film: `https://youtu.be/wSGW9E06Wg8` oraz do linków w opisie.