Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 26, 11.06.2021 r.

To już ostatni wykład, choć jest jeszcze wiele rozdziałów algebry liniowej, których nie dotknęliśmy. Najważniejszy z nich to tzw. algebra wieloliniowa. Co zrobimy?

- pojęcie produktu przestrzeni liniowych i pojęcie odwzorowania wieloliniowego,
- przestrzenie odwzorowań wieloliniowych (są dość skomplikowane), gdzie szczególnymi typami tych są tzw. tensory rzędu (p, q) (ważne obiekty),
- gdy już będzie się wydawało, że badanie tensorów jest beznadziejne (o ile nie przyjmiemy pewnych umów) przejdziemy do języka konstrukcji uniwersalnych i wskażemy konstrukcję pozwalającą na badanie przekształceń wieloliniowych w świecie algebry liniowej (przestrzeni liniowych i ich odwzorowań),
- koszt: przestrzenie liniowe oparte o iloczyn tensorowy, które będziemy badać, są stosunkowo skomplikowane i jest na nich sporo dodatkowej struktury,
- zaleta: dostajemy zunifikowany język do mówienia o bardzo wielu zjawiskach, nie tylko algebraicznych, a przy okazji zobaczymy kilka rozumowań *diagramowych*, bardzo charakterystycznych dla całej współczesnej algebry,
- główna motywacja: analiza i różniczkowanie na rozmaitościach (patrz np.: `https://www.fuw.edu.pl/~konieczn/geometry_lecture.pdf`).

Definicja

Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Na iloczynie kartezjańskim

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$$

wprowadzamy strukturę przestrzeni liniowej definiując działania:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (v_1', v_2', \ldots, v_n') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2', \ldots, v_n + v_n'),$$
$$\lambda \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \ldots, \lambda \cdot v_n).$$

Definicja

Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Na iloczynie kartezjańskim

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$$

wprowadzamy strukturę przestrzeni liniowej definiując działania:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) + (v_1', v_2', \ldots, v_n') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2', \ldots, v_n + v_n'),$$
$$\lambda \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2, \ldots, \lambda \cdot v_n).$$

Klasyczne przykłady:

- $K^n \times K^m \simeq K^{n+m}$, w szczególności $\underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{m} \simeq M_{m\times n}(K)$.
- $V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}_{q}$.

Definicja

Niech $V_1, \ldots, V_n$ oraz V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie

$$\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to V$$

nazywamy ***n*-liniowym**, lub **wieloliniowym**, gdy dla dowolnych $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ następujące odwzorowania są liniowe

$$V_i \ni x \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in V \quad (1 \leq i \leq n).$$

Definicja

Niech $V_1, \ldots, V_n$ oraz V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie

$$\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to V$$

nazywamy *n*-**liniowym**, lub **wieloliniowym**, gdy dla dowolnych $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ następujące odwzorowania są liniowe

$$V_i \ni x \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in V \quad (1 \leq i \leq n).$$

Przykłady:

- wyznacznik (jako funkcja n-liniowa na kolumnach) $\det : \overbrace{K^n \times \ldots \times K^n}^{n} \to K$,
- odwzorowanie: $f : K^n \to K$ postaci $f(a_1, \ldots, a_n) = \prod a_i$ jest n-liniowe,
- $f : L(V, W) \times L(U, V) \to L(U, W)$ dane wzorem $(\theta, \mu) \mapsto \theta \circ \mu$ jest dwuliniowe.

Definicja

Przestrzeń liniową odwzorowań n-liniowych $\phi : \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n} \to V$ oznaczamy przez $\mathrm{Hom}^n(U, W)$. Element tej przestrzeni nazywamy

- **symetrycznym**, gdy dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in$ oraz permutacji $\sigma \in S_n$ mamy:
$$\phi(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \phi(u_1, \ldots, u_n).$$
- **antysymetrycznym** (lub **skośnie-symetrycznym**), gdy dla dowolnych $u_1, \ldots, u_n \in U$ spełniających $u_i = u_j$, dla pewnych $1 \leq i < j \leq n$ mamy:
$$\phi(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

Podprzestrzenie odwzorowań symetrycznych i antysymetrycznych w $\mathrm{Hom}^n(U, W)$ oznaczamy przez $\mathrm{Hom}^n_s(U, W)$ oraz $\mathrm{Hom}^n_a(U, W)$.

Oczywiście $\det$ jako forma n-liniowa należy do $\mathrm{Hom}^n_a(K^n, K)$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dowolny funkcjonał $(p+q)$-liniowy:

$$\phi : V^p \times (V^*)^q \to K$$

nazywamy **tensorem** na V typu (p, q), rzędu $p + q$. Mówimy też, że tensor f jest p-krotnie **kowariantny** i q-krotnie **kontrawariantny**. Ponadto z definicji przyjmujemy, że tensor typu $(0, 0)$ to skalar z ciała K.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dowolny funkcjonał $(p+q)$-liniowy:

$$\phi : V^p \times (V^*)^q \to K$$

nazywamy **tensorem** na V typu (p, q), rzędu $p+q$. Mówimy też, że tensor f jest p-krotnie **kowariantny** i q-krotnie **kontrawariantny**. Ponadto z definicji przyjmujemy, że tensor typu $(0, 0)$ to skalar z ciała K.

Prawie wszystkie dobrze nam znane przykłady:

- tensory typu (1,0) to funkcjonały liniowe,
- tensory typu (0,1) można utożsamić z V (gdyż $V^{**} \simeq V$, gdy $\dim V < \infty$),
- tensory typu (2,0) to formy dwuliniowe na V,
- tensory typu (0,2) to formy dwuliniowe na V^*,
- $V \times V \times V^* \ni (v, w, f) \mapsto f(v \times w)$ jest tensorem typu (2,1) na V,
- wyznacznik jest tensorem typu $(n, 0)$ na $V = K^n$.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Istnieje wówczas bijekcja pomiędzy tensorami typu (1,1) na V oraz $\mathrm{End}(V)$.

Idea dla $V = K^n$. Weź $\phi \in \mathrm{End}(V)$ wyznaczone jednoznacznie przez ustalenie baz standardowych i wzięcie macierzy $M = M(\phi)_{st}^{st}$. Wówczas ϕ przypisać można funkcjonał $\Phi : V \times V^* \to K$ w następujący sposób:

$$\Phi(w, f) = xMy,$$

gdzie

- $x \in M_{1\times n}(K)$ – macierz $M(f)_{st}^{st}$,
- $y \in M_{n\times 1}(K)$ – współrzędne w w bazie standardowej.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową. Istnieje wówczas bijekcja pomiędzy tensorami typu (1,1) na V oraz $\mathrm{End}(V)$.

Idea dla $V = K^n$. Weź $\phi \in \mathrm{End}(V)$ wyznaczone jednoznacznie przez ustalenie baz standardowych i wzięcie macierzy $M = M(\phi)^{st}_{st}$. Wówczas ϕ przypisać można funkcjonał $\Phi : V \times V^* \to K$ w następujący sposób:

$$\Phi(w, f) = xMy,$$

gdzie

- $x \in M_{1\times n}(K)$ – macierz $M(f)^{st}_{st}$,
- $y \in M_{n\times 1}(K)$ – współrzędne w w bazie standardowej.

Czy twierdzenie jest prawdziwe dla $\dim V = \infty$?
Wypisz izomorfizm bez użycia baz (patrz slajd 4 w wykł. 6 u Prof. Wiśniewskiego).
Czy łatwiej wypisać ten izomorfizm wiedząc, że V jest euklidesowa?

Definicja (więcej i uogólnienia - np. w Kostrikinie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K.

- Zbiór tensorów symetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy przez $\sum^p V^*$, zaś zbiór tensorów symetrycznych typu $(0, q)$ na V oznaczamy $\sum^q V$.

Definicja (więcej i uogólnienia - np. w Kostrikinie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K.

- Zbiór tensorów symetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy przez $\sum^p V^*$, zaś zbiór tensorów symetrycznych typu $(0, q)$ na V oznaczamy $\sum^q V$.
- Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy $\bigwedge^p V^*$ nazywamy p**- tymi formami zewnętrznymi** lub p-**kowektorami** na V. Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(0, p)$ oznaczamy przez $\bigwedge^p V$ i nazywamy p-**wektorami**.

Definicja (więcej i uogólnienia - np. w Kostrikinie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K.

- Zbiór tensorów symetrycznych typu $(p,0)$ na V oznaczamy przez $\sum^p V^*$, zaś zbiór tensorów symetrycznych typu $(0,q)$ na V oznaczamy $\sum^q V$.
- Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(p,0)$ na V oznaczamy $\bigwedge^p V^*$ nazywamy p**- tymi formami zewnętrznymi** lub p-**kowektorami** na V. Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(0,p)$ oznaczamy przez $\bigwedge^p V$ i nazywamy p-**wektorami**.

Kluczowy fakt z końcówki pierwszego semestru.

Twierdzenie

Wyznacznik jest, z dokładnością do skalara w K, jedyną n-formą na K^n.

Definicja (więcej i uogólnienia - np. w Kostrikinie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K.

- Zbiór tensorów symetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy przez $\sum^p V^*$, zaś zbiór tensorów symetrycznych typu $(0, q)$ na V oznaczamy $\sum^q V$.
- Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy $\bigwedge^p V^*$ nazywamy p**- tymi formami zewnętrznymi** lub p-**kowektorami** na V. Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(0, p)$ oznaczamy przez $\bigwedge^p V$ i nazywamy p-**wektorami**.

Uogólnienie związku pomiędzy formami dwuliniowymi symetrycznymi i kwadratowymi dla ciał charakterystyki różnej od 2.

Definicja-twierdzenie (patrz książka Kostrikina)

Niech K będzie ciałem charakterystyki 0. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy kowariantnymi tensorami symetrycznymi na V, a wielomianami jednorodnymi stopnia p względem n zmiennych nad K.

Definicja (więcej i uogólnienia - np. w Kostrikinie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K.

- Zbiór tensorów symetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy przez $\sum^p V^*$, zaś zbiór tensorów symetrycznych typu $(0, q)$ na V oznaczamy $\sum^q V$.
- Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(p, 0)$ na V oznaczamy $\bigwedge^p V^*$ nazywamy p**- tymi formami zewnętrznymi** lub p-**kowektorami** na V. Zbiór tensorów antysymetrycznych typu $(0, p)$ oznaczamy przez $\bigwedge^p V$ i nazywamy p-**wektorami**.

Uwaga. Nie każdy tensor jest sumą tensora symetrycznego i antysymetrycznego (co ma duże znaczenie na przykład dla teorii reprezentacji grup). Aby napisać odpowiedni przykład warto wprowadzić iloczyn tensorowy form (a dalej: iloczyn tensorowy przestrzeni, którego elementy zinterpretujemy jako tensory).

Definicja

Niech $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to K$ oraz $g : W_1 \times \ldots \times W_s \to K$ będą dwiema dowolnymi formami wieloliniowymi. **Iloczynem tensorowym form** f i g nazywamy odwzorowanie:

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to K$$

określone wzorem: $(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_r; w_1, \ldots, w_s) = f(v_1, \ldots, v_r) \cdot g(w_1, \ldots, w_s)$.

Definicja

Niech $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to K$ oraz $g : W_1 \times \ldots \times W_s \to K$ będą dwiema dowolnymi formami wieloliniowymi. **Iloczynem tensorowym form** f i g nazywamy odwzorowanie:

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to K$$

określone wzorem: $(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_r; w_1, \ldots, w_s) = f(v_1, \ldots, v_r) \cdot g(w_1, \ldots, w_s)$.

Uwagi:

- na ogół mamy $f \otimes g \neq g \otimes f$,

Definicja

Niech $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to K$ oraz $g : W_1 \times \ldots \times W_s \to K$ będą dwiema dowolnymi formami wieloliniowymi. **Iloczynem tensorowym form** f i g nazywamy odwzorowanie:

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to K$$

określone wzorem: $(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_r; w_1, \ldots, w_s) = f(v_1, \ldots, v_r) \cdot g(w_1, \ldots, w_s)$.

Uwagi:

- na ogół mamy $f \otimes g \neq g \otimes f$,
- ale zawsze mamy $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$,

Definicja

Niech $f : V_1 \times \ldots \times V_r \to K$ oraz $g : W_1 \times \ldots \times W_s \to K$ będą dwiema dowolnymi formami wieloliniowymi. **Iloczynem tensorowym form** f i g nazywamy odwzorowanie:

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to K$$

określone wzorem: $(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_r; w_1, \ldots, w_s) = f(v_1, \ldots, v_r) \cdot g(w_1, \ldots, w_s)$.

Uwagi:

- na ogół mamy $f \otimes g \neq g \otimes f$,
- ale zawsze mamy $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$,
- jeśli f jest tensorem typu (p, q) oraz g – tensorem typu (r, s) na V, to $f \otimes g$ jest formą wieloliniową na iloczynie:

$$V^p \times (V^*)^q \times V^r \times (V^*)^s \simeq V^{p+r} \times (V^*)^{q+s},$$

  a więc $f \otimes g$ uważać można za tensor typu $(p + r, q + s)$ nazywany **iloczynem tensorowym tensorów** f i g.

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensor**a T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensora** T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Uwaga. Gdy $\dim V < \infty$ to można traktować wektory z V jako funkcjonały na V^* oraz wektory z V^* jako funkcjonały na V. A zatem do $\mathbb{T}^q_p(V)$ należy tensor:

$$\epsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{i_p} \otimes \epsilon_{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon_{j_q}.$$

W istocie zbiór n^{p+q} tensorów jw. stanowi bazę $\mathbb{T}^q_p(V)$. Dokładniej, dla każdego $T \in \mathbb{T}^q_p(V)$ mamy:

$$T = \sum T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \cdot \epsilon^{i_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{i_p} \otimes \epsilon_{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon_{j_q}.$$

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensor**a T w bazie (ϵ_i).

[a]W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Przykład. Rozważmy tensor $T = \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3 \in \mathbb{T}^0_3(\mathbb{R}^3)$. Twierdzimy, że nie jest to suma tensora symetrycznego i antysymetrycznego.

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensora** T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Przykład. Rozważmy tensor $T = \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3 \in \mathbb{T}^0_3(\mathbb{R}^3)$. Twierdzimy, że nie jest to suma tensora symetrycznego i antysymetrycznego. Dla $(v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{R}^3)^3$ mamy:

$$(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3)(v_1, v_2, v_3) = \epsilon^1(v_1) \cdot \epsilon^2(v_2) \cdot \epsilon^3(v_3),$$

przy czym $\epsilon^i(v)$ zwraca i-tą współrzędną v w bazie standardowej.

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \ldots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensora** T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Przykład. Rozważmy tensor $T = \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3 \in \mathbb{T}^0_3(\mathbb{R}^3)$. Twierdzimy, że nie jest to suma tensora symetrycznego i antysymetrycznego. Dla $(v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{R}^3)^3$ mamy:

$$(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3)(v_1, v_2, v_3) = \epsilon^1(v_1) \cdot \epsilon^2(v_2) \cdot \epsilon^3(v_3),$$

przy czym $\epsilon^i(v)$ zwraca i-tą współrzędną v w bazie standardowej. Mamy zatem:

$$T_{123} = 1, \quad T_{231} = 0.$$

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}^q_p(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensora** T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Przykład. Rozważmy tensor $T = \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3 \in \mathbb{T}^0_3(\mathbb{R}^3)$. Twierdzimy, że nie jest to suma tensora symetrycznego i antysymetrycznego. Dla $(v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{R}^3)^3$ mamy:

$$(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3)(v_1, v_2, v_3) = \epsilon^1(v_1) \cdot \epsilon^2(v_2) \cdot \epsilon^3(v_3),$$

przy czym $\epsilon^i(v)$ zwraca i-tą współrzędną v w bazie standardowej. Mamy zatem:

$$T_{123} = 1, \quad T_{231} = 0.$$

Ale dla każdego tensora symetrycznego lub antysymetrycznego S typu $(3, 0)$ zachodzi $S_{123} = S_{231}$ (dla antysymetrycznych mamy: $S_{123} = -S_{213} = -(-S_{231})$).

Uwaga-definicja

Zbiór $\mathbb{T}_p^q(V)$ wszystkich tensorów typu (p, q) na przestrzeni V jest przestrzenią liniową. Wybierzmy w V oraz V^* bazy dualne[a]: $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), (\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ Wartość tensora T typu (p, q) na układzie wektorów: $(\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_p}, \epsilon^{j_1}, \dots, \epsilon^{j_q})$ oznaczamy jako $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ i nazywamy **współrzędnymi tensora** T w bazie (ϵ_i).

[a] W teorii tej stosujemy notację z indeksami dolnymi i górnymi: $\epsilon_i^* = \epsilon^i$

Przykład. Rozważmy tensor $T = \epsilon^1 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^3 \in \mathbb{T}^0_3(\mathbb{R}^3)$. Twierdzimy, że nie jest to suma tensora symetrycznego i antysymetrycznego.

W języku **liniowych reprezentacji grup** (którego jeszcze nie znamy) oznacza to, że **reprezentacja regularna** grupy symetrycznej S_3 nie może być sumą **reprezentacji trywialnych** i **reprezentacji permutacyjnych** grupy S_3.
W istocie zawiera ona **nieprzywiedlną** 2-wymiarową reprezentację S_3.
Patrz np.: A. Sładek: Elementy teorii reprezentacji liniowych grup skończonych: `http://www.math.us.edu.pl/sladek/dydaktyka/SD/Etr1.pdf`.

Definicja - twierdzenie

Niech $V_1, \ldots, V_n$ będą przestrzeniami liniowymi nad K. Wówczas istnieje para (T, τ) nazywana **iloczynem tensorowym** przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, gdzie:

- T, oznaczane przez $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, jest przestrzenią liniową nad K,
- $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to T$ jest n-liniowe

są wybrane tak, że dla dowolnego n-liniowego $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f : T \to W$ takie, że $\phi = f \circ \tau$:

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "f"] & & W
\end{tikzcd}$$

Intuicja: iloczyn tensorowy to konstrukcja sprowadzająca badanie odwzorowań wieloliniowych na zbiorze (potencjalnie nieskomplikowanych) przestrzeni do *znanej nam* algebry liniowej (uprawianej na dość egzotycznych przestrzeniach).

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T, τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T', τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T' \end{tikzcd}$$

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T, τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T', τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T' \end{tikzcd}$$

(a) Skoro (T, τ) jest iloczynem tensorowym $V_1, \ldots, V_n$, wiec dla $W = T'$ oraz $\phi = \tau'$ mamy dokładnie jeno przekształcenie liniowe $f : T \to T'$ takie, że:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "f"] & & T' \end{tikzcd}$$

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T, τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T', τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T' \end{tikzcd}$$

(b) Skoro (T', τ') jest iloczynem tensorowym $V_1, \ldots, V_n$, wiec dla $W = T$ oraz $\phi = \tau$ mamy dokładnie jeno przekształcenie liniowe $f' : T' \to T$ takie, że:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T' \arrow[rr, dashed, "f'"] & & T \end{tikzcd}$$

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T,τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T',τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1,\ldots,V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T'
\end{tikzcd}$$

A zatem mamy parę diagramów przemiennych

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
T \arrow[r, "f"] & T' \arrow[r, "f'"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T' \arrow[r, "f'"] & T \arrow[r, "f"] & T'
\end{tikzcd}$$

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T, τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T', τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$
\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T'
\end{tikzcd}
$$

Ale mamy też przemienność następujących diagramów

$$
\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_T"', red] & T' \arrow[r, "f'"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T' \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right, "id_{T'}"', red] & T \arrow[r, "f"] & T'
\end{tikzcd}
$$

Pokażmy, że iloczyn tensorowy (T, τ) **wyznaczony jest z dokładnością do izomorfizmu** (o ile w ogóle istnieje). Oznacza to, że jeśli para (T', τ') jest również iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, to istnieje jedyny izomorfizm $\rho : T \to T'$ spełniający

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "\rho"] & & T'
\end{tikzcd}$$

Ale mamy też przemienność następujących diagramów

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\
T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, red, "id_T"'] & T' \arrow[r, "f'"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
T' \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend right, red, "id_{T'}"'] & T \arrow[r, "f"] & T'
\end{tikzcd}$$

A zatem: $f' \circ f = \mathrm{id}_T$ oraz $f \circ f' = \mathrm{id}\ T'$, czyli f to szukany izomorfizm ρ.

Twierdzenie (dość egzotyczna konstrukcja iloczynu tensorowego)

Niech F będzie **wolną przestrzenią liniową** nad K o bazie $V_1 \times \cdots \times V_n$ (elementami przestrzeni F są formalne kombinacje liniowe postaci

$$\sum_{(v_1,\dots,v_n)\in V_1\times\cdots\times V_n} \lambda_{v_1,\dots,v_n}(v_1,\dots,v_n),$$

gdzie tylko skończenie wiele skalarów $\lambda_{v_1,\dots,v_n} \in K$ jest różnych od zera). Rozważmy podprzestrzeń N w F rozpiętą przez wszystkie wektory postaci

- $(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)-(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)-(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)$,
- $(v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_n)-\lambda(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)$

gdzie $v_i, v_i' \in V_i$ dla $1 \leq i \leq n$ oraz $\lambda \in K$. Wówczas para (T,τ) jest iloczynem tensorowym przestrzeni $V_1,\dots,V_n$, gdzie:

- $T = F/N$ jest przestrzenią ilorazową,
- τ to złożenie $V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\text{injekcja}} F \xrightarrow{\text{kanon.}} F/N = T$.

O co tu chodzi? Kilka przykładów.

- Weźmy $V_1 = V_2 = V$, $K = \mathbb{R}$. Oto przykłady **różnych** elementów F:

  $$2(v, 2v), \quad 2(v, v) + 2(v, v), \quad (2v, 2v), \quad 4(v, v), \quad 3(2v, v) - (v, 2v).$$

  Wszystkie te elementy będą utożsamione w F/N z elementem: $4 \cdot v \otimes v$.

O co tu chodzi? Kilka przykładów.

- Weźmy $V_1 = V_2 = V$, $K = \mathbb{R}$. Oto przykłady **różnych** elementów F:
$$2(v, 2v), \quad 2(v, v) + 2(v, v), \quad (2v, 2v), \quad 4(v, v), \quad 3(2v, v) - (v, 2v).$$
Wszystkie te elementy będą utożsamione w F/N z elementem: $4 \cdot v \otimes v$.
- Weźmy $V_1 = K[x]$, $V_2 = K[y]$. Oto różne elementy F:
$$(4x, y^2), \quad (x, y^2) + 3(x, y^2), \quad (2x, 2y^2),$$
reprezentowane w iloczynie tensorowym $K[x] \otimes K[y]$ przez $4x \otimes y^2$, który utożsamimy z $4xy^2 \in K[x, y]$.

O co tu chodzi? Kilka przykładów.

- Weźmy $V_1 = V_2 = V$, $K = \mathbb{R}$. Oto przykłady **różnych** elementów F:
$$2(v, 2v), \quad 2(v, v) + 2(v, v), \quad (2v, 2v), \quad 4(v, v), \quad 3(2v, v) - (v, 2v).$$
Wszystkie te elementy będą utożsamione w F/N z elementem: $4 \cdot v \otimes v$.
- Weźmy $V_1 = K[x]$, $V_2 = K[y]$. Oto różne elementy F:
$$(4x, y^2), \quad (x, y^2) + 3(x, y^2), \quad (2x, 2y^2),$$
reprezentowane w iloczynie tensorowym $K[x] \otimes K[y]$ przez $4x \otimes y^2$, który utożsamimy z $4xy^2 \in K[x, y]$.
- Weźmy $V_1 = M_2(\mathbb{R})$ oraz $V_2 = \mathbb{C}$ jako przestrzeń nad $\mathbb{R}$. Wówczas elementy:
$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, 1 + i \right), \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 2 + 2i \right),$$
utożsamimy z macierzą z $M_2(\mathbb{C})$ postaci: $\begin{bmatrix} 2 + 2i & 0 \\ 0 & 2 + 2i \end{bmatrix}$.

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Złożenie $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} F/N$ przeprowadzające $(v_1, \ldots, v_n)$ na klasę $\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)] \in T/N$ jest n-liniowe.

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Złożenie $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} F/N$ przeprowadzające $(v_1, \ldots, v_n)$ na klasę $\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)] \in T/N$ jest n-liniowe.
- Istotnie, dla dowolnych $v_i, v_i' \in V_i$ oraz skalarów $\lambda, \mu \in K$ mamy:

$$\tau(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k) - \lambda\tau(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - \mu\tau(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k) =$$
$$[(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k)] - \lambda[(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)] - \mu[(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k)] =$$
$$[(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k) - \lambda(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - \mu(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k)] = 0.$$

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Złożenie $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} F/N$ przeprowadzające $(v_1, \ldots, v_n)$ na klasę $\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)] \in T/N$ jest n-liniowe.
- Istotnie, dla dowolnych $v_i, v_i' \in V_i$ oraz skalarów $\lambda, \mu \in K$ mamy:

$$\tau(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k) - \lambda\tau(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - \mu\tau(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k) =$$
$$[(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k)] - \lambda[(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)] - \mu[(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k)] =$$
$$[(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots v_k) - \lambda(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) - \mu(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_k)] = 0.$$

- Rozważmy dowolne przekształcenie n-liniowe $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Interesuje nas określenie przekształcenia liniowego $f : F/N \to W$ tak, by:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ F/N \arrow[rr, dashed, "f"] & & W \end{tikzcd}$$

Dowód istnienia iloczynu tensorowego (cd).

- **Lemat (twierdzenie o izomorfizmie).** Niech $W \subseteq V$ będzie podprzestrzenią. Wówczas dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to V'$ takiego, że

$$\ker(\phi) \supseteq W,$$

istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie liniowe $\psi : V/W \to V'$ takie, że $\phi = \pi \circ \psi$, czyli następujący diagram jest przemienny.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V' \\ & V/W \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

W szczególności dowolne przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ faktoryzuje się przez odpowiednie przekształcenie $\psi : V/ker(\phi) \to W$ dane wzorem:

$$\psi(\alpha + \ker(\phi)) = \phi(\alpha).$$

Dowód pozostawiam jak proste ćwiczenie (chyba już było).

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Przypomnijmy, że $\tau = \pi \circ i$.

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "\phi"] & \\
F/N & F \arrow[l, "\pi"] & W
\end{tikzcd}$$

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Przypomnijmy, że $\tau = \pi \circ i$. Skoro $V_1 \times \ldots \times V_n$ jest bazą przestrzeni F, to istnieje jednoznacznie wyznaczone (na bazie!) przekształcenie liniowe $g : F \to W$ o własności $g \circ i = \phi$.

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[d, "i"] \arrow[ddl, "\tau"'] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
 & F \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & \\
F/N & & W
\end{tikzcd}$$

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Przypomnijmy, że $\tau = \pi \circ i$. Skoro $V_1 \times \ldots \times V_n$ jest bazą przestrzeni F, to istnieje jednoznacznie wyznaczone (na bazie!) przekształcenie liniowe $g : F \to W$ o własności $g \circ i = \phi$. Ponieważ ϕ jest n-liniowe, to $N \subseteq \ker(g)$ (wprost z definicji N). Zatem na mocy lematu istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie liniowe $f : F/N \to W$ spełniające $f \circ p = g$.

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[ddl, "\tau"'] \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
 & F \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & \\
F/N \arrow[rr, dashed, "f"] & & W
\end{tikzcd}$$

Dowód istnienia iloczynu tensorowego.

- Przypomnijmy, że $\tau = \pi \circ i$. Skoro $V_1 \times \ldots \times V_n$ jest bazą przestrzeni F, to istnieje jednoznacznie wyznaczone (na bazie!) przekształcenie liniowe $g : F \to W$ o własności $g \circ i = \phi$. Ponieważ ϕ jest n-liniowe, to $N \subseteq \ker(g)$ (wprost z definicji N). Zatem na mocy lematu istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie liniowe $f : F/N \to W$ spełniające $f \circ p = g$.

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[ddl, "\tau"'] \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
 & F \arrow[dl, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & \\
F/N \arrow[rr, dashed, "f"] & & W
\end{tikzcd}$$

- Dowód jest zatem zakończony. Zobaczmy kilka przykładów.

Dwa podstawowe przykłady.

- Niech K będzie ciałem oraz $n, m \geq 1$. Wówczas: $K^m \otimes K^n \simeq M_{m \times n}(K)$.

  Istotnie, traktując elementy K^n oraz K^m jako macierze jednokolumnowe mamy odwzorowanie:

  $$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto xy^T \in M_{m \times n}(K).$$

  Jest to oczywiście odwzorowanie dwuliniowe i nietrudno pokazać, że odwzorowanie

  $$\Psi(x \otimes y) = xy^T$$

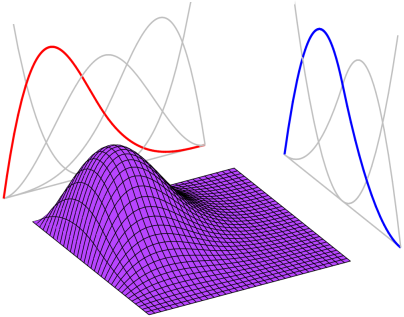
  jest izomorfizmem liniowym. Dokładniej, można pokazać, że jeśli $\{u_1, \ldots, u_m\}$ oraz $\{v_1, \ldots, v_n\}$ są bazami standardowymi przestrzeni K^n oraz K^m, zaś $E_{ij} \in M_{m \times n}(K)$ są jedynkami macierzowymi, to:

  $$\Phi(u_i \otimes v_j) = E_{ij}.$$

Dwa podstawowe przykłady.

- $K[x] \otimes K[y] \simeq K[x, y]$.

  Istotnie, odwzorowanie $K[x] \times K[y] \ni (f, g) \mapsto f(x)g(y) \in K[x, y]$ jest dwuliniowe, więc istnieje odwzorowanie liniowe $\Phi : K[x] \otimes K[y] \to K[x, y]$ takie, że: $\Phi(f \otimes g) = f(x) \otimes g(y)$. Nietrudno widzieć, że jest to izomorfizm.



Ilustracja iloczynu tensorowego dwóch wielomianów Bernsteina. Źródło: Wikipedia.

Definicja

Elementy przestrzeni $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ są kombinacjami liniowymi elementów postaci:

$$\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)],$$

które nazywamy **tensorami prostymi** i oznaczamy

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n.$$

Definicja

Elementy przestrzeni $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ są kombinacjami liniowymi elementów postaci:

$$\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)],$$

które nazywamy **tensorami prostymi** i oznaczamy

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n.$$

Oczywiście mamy np. w $V \otimes W$ nad $\mathbb{R}$: równości
$2v \otimes w = v \otimes 2w = v \otimes w + v \otimes w = 4v \otimes \frac{1}{2}w + 0 \otimes 100w + 24v \otimes 0.$

Definicja

Elementy przestrzeni $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ są kombinacjami liniowymi elementów postaci:

$$\pi(i(v_1, \ldots, v_n)) = [(v_1, \ldots, v_n)],$$

które nazywamy **tensorami prostymi** i oznaczamy

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n.$$

Oczywiście mamy np. w $V \otimes W$ nad $\mathbb{R}$: równości
$2v \otimes w = v \otimes 2w = v \otimes w + v \otimes w = 4v \otimes \frac{1}{2}w + 0 \otimes 100w + 24v \otimes 0.$

Dobre ćwiczenie. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $n \geq 1$. Przypuśćmy, że $v_1, \ldots, v_n \in V$ są liniowo niezależne. Udowodnij, że jeśli dla pewnych $u_1, \ldots, u_n \in V$ mamy:

$$v_1 \otimes u_1 + v_2 \otimes u_2 + \ldots + v_n \otimes v_n = 0 \in V \otimes V,$$

to $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Istnieje kanoniczny izomorfizm:

$$\underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q} \mapsto \mathbb{T}^q_p(V)$$

przypisujący tensorowi:

$$f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_q, \quad f^i \in V^*, v_j \in V,$$

odwzorowanie wieloliniowe $T : V^p \times (V^*)^q \to K$ określone wzorem:

$$T(u_1, \ldots, u_p, g^1, \ldots, g^q) = f^1(u_1) \ldots f^p(u_p) \cdot g^1(v_1) \ldots g^q(v_q).$$

Niekiedy p-krotny iloczyn tensorowy $V \otimes \ldots \otimes V$ nazywa się p-krotną potęgą tensorową przestrzeni V i oznacza przez $V^{\otimes p}$. Innymi słowy:

$$\mathbb{T}^q_p(V) \simeq (V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}.$$

Definicja

Niech $n \geq 1$ oraz V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Rozważmy n-tą potęgę tensorową $\mathrm{T}^n V = V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$ oraz jej podprzestrzenie

$$N_s = \mathrm{lin}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} : v_1, \ldots, v_n \in V \text{ oraz } \sigma \in S_n\},$$
$$N_a = \mathrm{lin}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n : v_1, \ldots, v_n \in V \text{ oraz } v_i = v_j \text{ dla pewnych } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Zdefiniujmy $\sum^n V = \mathrm{T}^n V / N_s$ oraz $\bigwedge^n V = \mathrm{T}^n V / N_a$. Niech ponadto

$$\tau_s = p_s \circ \tau \qquad \text{oraz} \qquad \tau_a = p_a \circ \tau,$$

gdzie $\tau\colon V \times \cdots \times V \to \mathrm{T}^n V$ to kanoniczne odwzorowanie n-liniowe, zaś $p_s\colon \mathrm{T}^n V \to \sum^n V$ oraz $p_a\colon \mathrm{T}^n V \to \bigwedge^n V$ to naturalne rzutowania.

Przestrzenie $\sum^n V$ oraz $\bigwedge^n V$ nazywamy, odpowiednio, ***n*-tą potęgą symetryczną** oraz ***n*-tą potęgą zewnętrzną** przestrzeni V. Elementy przestrzeni $\bigwedge^n V$ nazywamy czasami ***n*-wektorami**, zaś elementy $\bigwedge^n V^*$ – ***n*-formami**.

Ćwiczenie

Niech $n \geq 1$ oraz V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech

$$v_1 \odot \cdots \odot v_n = \tau_s(v_1, \ldots, v_n) \qquad \text{oraz} \qquad v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \tau_a(v_1, \ldots, v_n)$$

dla dowolnych $v_1, \ldots, v_n \in V$. Udowodnij, że gdy $\dim V = m < \infty$ oraz zbiór $\{e_1, \ldots, e_m\}$ jest bazą przestrzeni V, to zbiory

$$\{e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_n} : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq m\}$$

oraz

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m\}$$

są bazami przestrzeni $\sum^n V$ oraz $\bigwedge^n V$, odpowiednio. W szczególności $\dim \Sigma^n V = \binom{n+m-1}{n}$ oraz $\dim \Lambda^n V = \binom{m}{n}$ (gdy $n > m$, to $\binom{m}{n} = 0$).

Iloczyn zewnętrzny ma bardzo ważne znaczenie geometryczne. Patrz S. Winitzki: *Linear Algebra via Exterior Products* oraz (wspominane) M. Audin: *Geometry*.

Definicja

Niech $f \in \mathrm{End}(V)$ oraz $g \in \mathrm{End}(W)$. **Iloczynem tensorowym przekształceń liniowych** f, g nazywamy odwzorowanie

$$f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W$$

spełniające warunek

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

Istnienie i jednoznaczność tego iloczynu wynikają z konstrukcji iloczynu tensorowego, ponieważ odwzorowanie $\tau'(v, w) = f(v) \otimes g(w)$ jest dwuliniowe.

Niezwykle istotna w różnych działach matematyki jest macierz iloczynu tensorowego przekształceń liniowych. Jeśli f ma macierz rozmiaru n oraz g ma macierz rozmiaru m, to $f \otimes g$ ma macierz rozmiaru nm. Jaka to macierz?

Fakt (przypominający najlepsze momenty naszej *rachunkowości*)

Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą V oraz $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ – bazą W. Wówczas jeśli

$$A = M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (a_{ij}), \quad B = M(g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}},$$

to macierz przekształcenia liniowego $f \otimes g \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ w bazie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ złożonej z wektorów:

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1, \ldots, \alpha_1 \otimes \beta_m, \ldots, \alpha_n \otimes \beta_1, \ldots, \alpha_n \otimes \beta_m)$$

oznaczana jest przez $A \otimes B$ i nazywana **iloczynem Kroneckera macierzy** A, B. Macierz ta ma postać blokową:

$$A \otimes B = M(f \otimes g)_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}^{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \ldots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

Iloczyn Kroneckera ma niezwykłe własności. Oto dwie podstawowe, dla macierz $A \in M_n(K)$ oraz $B \in M_m(K)$:

- $tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$,
- $\det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n$.

Mają one zastosowanie między innymi w teorii reprezentacji grup. Ale iloczyn Kroneckera można rozważać też w (pewnym) oderwaniu od algebry wieloliniowej np. w problemach:

- badania iloczynu tensorowego grafów (macierz incydencji tego produktu to...),
- poszukiwania macierzy Hadamarda (problem otwarty),
- badania tzw. równań Yanga-Baxtera (poważny problem otwarty).

Więcej można poczytać w A. Męcel: *Matematyczne prezenty, czyli kilka problemów otwartych wokół produktu Kroneckera macierzy*: `https://mimuw.edu.pl/~amecel/2017z/galj/[12.22]gal.pdf`.

W tym miejscu musimy zakończyć wykład. Z algebrą wieloliniową w ręku (wiele trzeba doczytać!) mogą Państwo wyruszyć z *matematycznego przedszkola* w wielką podróż po Matematyce aż do Nieznanego. Życzę powodzenia :)