Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 25, 8.06.2021 r.

Zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq$ 2.

Twierdzenie

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
(i) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} & r = r(f) & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
\textit{lub} & & & & \\
(ii) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} & r = r(f) < n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
(b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} & 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$
\begin{array}{lll}
(c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n, \\
(c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1, \\
(c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1.
\end{array}
$$

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}
$$

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnia X stopnia 2, w n wymiarowej przestrzeni afinicznej H jest **właściwa**, jeśli X nie jest zawarta w $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni H.

Przykłady.

- Sfera $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
- Zbiór $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ nie jest hiperpowierzchnią właściwą. Jest to prosta w $\mathbb{R}^3$.

Wniosek (o formach kanonicznych hiperpowierzchni właściwych)

Dla każdej hiperpowierzchni właściwej X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq s < r < n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}$$

(1) Jeśli X jest w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ opisana równaniem postaci (ri), zaś w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ – równaniem (rj), to $i = j$.

(2) Jeśli X jest opisywana równaniami postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$, to występująca w nich liczba r jest niezależna od wyboru układu bazowego.

(3) Jeśli X jest opisywana równaniami typu (r1), to występująca w nich liczba s jest we wszystkich równaniach taka sama. Jeśli X jest opisywana równaniem (r2) lub (r3), to dla każdych dwóch różnych takich równań występujące w nich liczby s są albo jednakowe, albo ich suma wynosi r.

Definicja

Mówimy, że punkt $p \in H$ jest **środkiem symetrii hiperpowierzchni** $X \subset H$, jeśli dla każdego punktu q należącego do X punkt $p - \overrightarrow{pq}$ też należy do X.

Inaczej mówiąc: $p \in H$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X, jeśli dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ zachodzi równoważność

$$p + \alpha \in X \Leftrightarrow p - \alpha \in X.$$

Zatem punkt p jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X wtedy i tylko wtedy, gdy symetria względem punktu p (czyli jednokładność o środku p i skali -1) przeprowadza X na X.

Przykłady:

- okrąg opisany w $\mathbb{R}^2$ równaniem $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1$ ma środek symetrii w punkcie $(2, 0)$.
- parabola opisana w $\mathbb{R}^2$ równaniem $x_1^2 + x_2 = 0$ nie ma środka symetrii.

Twierdzenie A

Niech X będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + d = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$. Wówczas punkt p jest środkiem symetrii zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w tym układzie bazowym współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n.$$

Twierdzenie B

Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + x_n = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0, r < n$. Wówczas X nie ma środka symetrii.

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$

to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:

$$\begin{aligned} p + \alpha &= p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ &= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne
$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$
to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:
$$p + \alpha = p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n =$$
$$= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n.$$
- Jasne jest więc, że $p + \alpha \in X$ (czyli $a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + d = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p - \alpha \in X$ (czyli $a_1(-y_1)^2 + \ldots + a_r(-y_r)^2 + d = 0$).

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ współrzędne
$$\underbrace{0, \dots, 0}_{r}, s_{r+1}, \dots, s_n,$$
to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:
$$\begin{aligned} p + \alpha = p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ = p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$
- Jasne jest więc, że $p + \alpha \in X$ (czyli $a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + d = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p - \alpha \in X$ (czyli $a_1(-y_1)^2 + \ldots + a_r(-y_r)^2 + d = 0$).
- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \dots, s_n$ w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \dots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{2}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{2}$$
- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$. Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $2s_1 - z_1, \ldots, 2s_n - z_n$, a więc: $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli
$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{3}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{2}$$
- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$. Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $2s_1 - z_1, \ldots, 2s_n - z_n$, a więc: $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli
$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{3}$$
- Odejmując (2) od (3) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:
$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \tag{4}$$
Otrzymaliśmy: współrzędne $z_1, \ldots, z_n$ każdego punktu $z \in X$ spełniają (4). A więc X zawarty jest w zbiorze spełniającym (4). Gdyby $s_i \neq 0$, dla pewnego $i = 1, \ldots, r$, to (4) opisywałoby $n - 1$ wymiarową podprzestrzeń afiniczną $M \subseteq H$ i mielibyśmy $X \subseteq M$, co przeczyłoby założeniu, że X jest właściwa.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy

$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{5}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{5}$$
- Niech α będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $T(H)$ współrzędne
$$-2s_1, 0, 0, \ldots 0.$$
Wówczas punkt $p + \alpha$ ma współrzędne
$$-s_1, s_2, \ldots, s_n$$
więc $p + \alpha \in X$. Stąd $p - \alpha \in X$, bo p to środek symetrii. Punkt $p - \alpha$ ma jednak współrzędne
$$3s_1, s_2, \ldots, s_n,$$
więc dostajemy
$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{6}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Odejmując (5) od (6) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$. Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (5) $s_n = 0$. Zatem p ma współrzędne
$$0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0.$$
Wówczas dla każdego wektora o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$ mamy $p + \beta \in X$ oraz $p - \beta \notin X$. A zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że p jest środkiem symetrii X.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Odejmując (5) od (6) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$. Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (5) $s_n = 0$. Zatem p ma współrzędne
$$0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0.$$
Wówczas dla każdego wektora o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$ mamy $p + \beta \in X$ oraz $p - \beta \notin X$. A zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że p jest środkiem symetrii X.

- Przypadek 2. Punkt p nie należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$
Niech α będzie wektorem o współrzędnych $0, 0, \ldots, 0, a$, gdzie
$$a = -(a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n).$$
Wówczas $p + \alpha \in X$ zaś $p - \alpha \notin X$. Znowu sprzeczność.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.
- Układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle, \rangle)$ związany z bazą ortogonalną V, będziemy nazywać **prostokątnym układem współrzędnych**.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K.

- Dowolny izomorfizm $\phi : V \to K^n$ nazwiemy **układem współrzędnych** w V.
- Powiemy, że układ współrzędnych ϕ jest **związany z bazą** $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, jeśli ϕ przeprowadza α_i na i-ty wektor bazy standardowej.
- Układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle, \rangle)$ związany z bazą ortogonalną V, będziemy nazywać **prostokątnym układem współrzędnych**.
- **Afinicznym układem współrzędnych** w przestrzeni afinicznej E nad K (związanym z układem bazowym $p; \mathcal{A}$) nazywamy $\phi_p : E \to K^n$ dane wzorem:

$$\phi_p(p + v) = \phi(v),$$

  gdzie $p \in E$, zaś ϕ jest układem współrzędnych w $T(E)$ związanym z bazą $\mathcal{A}$. Jeśli E jest przestrzenią euklidesową i $\mathcal{A}$ jest bazą prostopadłą, wówczas mówimy, że układ ϕ_p jest prostokątny.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ – euklidesowe afiniczne oraz niech X_1, X_2 to hiperpowierzchnie odpowiednio w H_1 oraz H_2. Powiemy, że X_1 ma ten sam **typ izometryczny** co X_2, jeśli istnieje izometria $\phi : H_1 \to H_2$ taka, ze $\phi(X_1) = X_2$.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ – euklidesowe afiniczne oraz niech X_1, X_2 to hiperpowierzchnie odpowiednio w H_1 oraz H_2. Powiemy, że X_1 ma ten sam **typ izometryczny** co X_2, jeśli istnieje izometria $\phi : H_1 \to H_2$ taka, ze $\phi(X_1) = X_2$.

Twierdzenie

Każda hiperpowierzchnia właściwa stopnia 2 w przestrzeni euklidesowej afinicznej E wymiaru n jest opisana, w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych, jednym z poniższych równań, dla $a_i > 0$ nazywanych **półosiami** (Kostrikin):

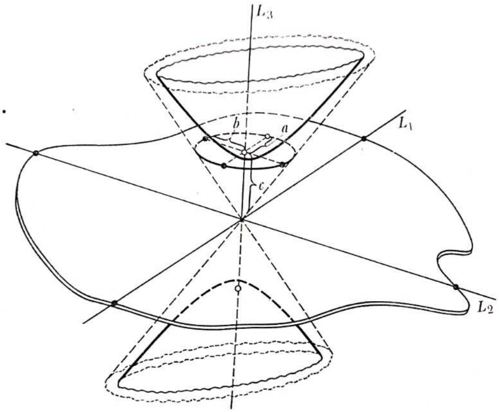
$$
\begin{array}{lll}
(i1) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0, & dla \quad n \geq r > s \geq 0, \\
(i2) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, & dla \quad n \geq r > s \geq \frac{r}{2}, \\
(i3) & \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + x_n = 0, & dla \quad n-1 \geq r > s \geq \frac{r}{2}.
\end{array}
$$

(d) *Hiperboloida dwupowłokowa*:

$$f = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + 1,$$

$$f^{-1}(0) \in EH_{21},$$

$$N(f) = \left(\left\{\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2}\right\}, 0, 1\right).$$



Jedna z wielu pięknych ilustracji z książki J. Komorowskiego
„Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów algebr Liego i kwadryk", PWN 1978.
(Każdemu gorąco polecam czytanie tej książki, a nawet jej zakup, jeśli to możliwe!)

Dowód (powtórka) Zacznijmy od dowolnego prostokątnego układu współrzędnych $p_0, \mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^n$ i niech X będzie w nim opisana równaniem:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 = x^T A x + b^T x + c,$$

gdzie $A = A^T$. Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{B}$, w której forma kwadratowa opisana w bazie $\mathcal{A}$ macierzą A ma postać diagonalną. A zatem w prostokątnym układzie współrzędnych $p_0, \mathcal{B}$ powierzchnia X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + c = 0.$$

Dowód (powtórka) Zacznijmy od dowolnego prostokątnego układu współrzędnych $p_0, \mathcal{A}$ w $\mathbb{R}^n$ i niech X będzie w nim opisana równaniem:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 = x^T A x + b^T x + c,$$

gdzie $A = A^T$. Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{B}$, w której forma kwadratowa opisana w bazie $\mathcal{A}$ macierzą A ma postać diagonalną. A zatem w prostokątnym układzie współrzędnych $p_0, \mathcal{B}$ powierzchnia X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + c = 0.$$

Załóżmy, że $\lambda_i \neq 0$, dla $i \leq r$ oraz $\lambda_i = 0$, dla $i > r$. Przepisujemy równanie wyżej:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(y_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i y_i + c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2} = 0.$$

Dowód (powtórka) cd. W prostokątnym układzie $p_0, \mathcal{A}$ hiperpowierzchnia X jest opisana równaniem:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(y_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i y_i + c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2} = 0.$$

Weźmy przesunięcie:

$$p_0 + (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n) \overset{\text{izometria}}{\mapsto} p_0 + (y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \ldots, y_r + \frac{b_r}{2\lambda_r}, y_{r+1}, \ldots, y_n).$$

Przeprowadza ona dotychczasowy układ na taki, w którym X opisana jest równaniem:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

dla $c' = c - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2}$. Teraz rozważamy trzy przypadki:

$(i)\, b_i = 0, c' = 0.$ $(ii)\, b_i \neq 0, c' = 0,$ $(iii)\, b_i \neq 0,$ dla pewnego i.

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 1. $b_i = 0, c' = 0$. Możemy założyć (ewentualnie zamieniając za pomocą izometrii kolejność zmiennych), że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0$$

(wszystkie λ_i nie mogą być jednego znaku). Wówczas biorąc

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

dostajemy postać (i2), czyli

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0.$$

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 2. $b_i = 0, c' \neq 0$. Możemy założyć (ewentualnie zamieniając za pomocą izometrii kolejność zmiennych), że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Wówczas mnożymy równanie przez $\frac{1}{c'}$ i przyjmujemy

$$a_i = \frac{\sqrt{|c_i|}}{\sqrt{|\lambda_i|}}$$

uzyskując postać (i1), czyli:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 1 = 0.$$

Dowód cd.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' = 0,$$

Przypadek 3. $b_i \neq 0$, dla pewnego i. Możemy założyć, że

$$\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_s > 0, \lambda_{s+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Biorąc izometrię, która przeprowadza $p_0 + z_i\alpha_i \mapsto p_0 + z_i\alpha_i$, dla $i < n$ oraz

$$p_0 + \frac{\sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c'}{\| \sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' \|}\alpha_n \mapsto p_0 + \frac{z_n}{\|z_n\|}\alpha_n,$$

dzieląc przez $d = \| \sum\limits_{i=r+1}^{n} b_i z_i + c' \| / \|z_n\|$ i biorąc $a_i = \frac{\sqrt{|d|}}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ dostajemy postać (i3):

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \ldots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + x_n = 0.$$

A zatem pokazaliśmy, że każda hiperpowierzchnia właściwa stopnia 2 w przestrzeni euklidesowej afinicznej E wymiaru n jest opisana, w odpowiednim prostokątnym układzie współrzędnych, jednym z poniższych równań:

$$
\begin{array}{lll}
(i1) & \frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_s^2}{a_s^2}-\frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2}-\ldots-\frac{x_r^2}{a_r^2}+1=0, & dla \quad a_i>0,\ n\geq r>s\geq 0,\\
(i2) & \frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_s^2}{a_s^2}-\frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2}-\ldots-\frac{x_r^2}{a_r^2}=0, & dla \quad a_i>0,\ n\geq r>s\geq \frac{r}{2},\\
(i3) & \frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_s^2}{a_s^2}-\frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2}-\ldots-\frac{x_r^2}{a_r^2}+x_n=0, & dla \quad a_i>0,\ n-1\geq r>s\geq \frac{r}{2}.
\end{array}
$$

Twierdzenie (dowód w książce J. Komorowskiego, str. 286-288)

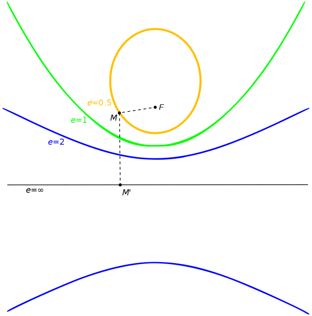
Jeśli hiperpowierzchnia wielomianowa stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$ jest w pewnym ortogonalnym układzie bazowym opisana w jednej z form (i1), (i3), to zbiór współczynników $\{a_1,\ldots,a_r\}$ nie zależy od wyboru ortogon. układu bazowego.

Idea: zacznij od (i2) i dwóch układów bazowych zaczepionych w tym samym punkcie.

Definicja

Niech $F \in \mathbb{R}^2$, niech $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie prostą i niech $e > 0$. Stożkową o **ognisku** F, **kierownicy** K i mimośrodzie e w przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór:

$$S(F, K, e) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(p, F) = e \cdot \rho(p, K)\}.$$



Fakt (`https://www.mimuw.edu.pl/~ziemians/gax2015w/galx15.pdf`)

Dla $F \notin K$ stożkowa jest

- **elipsą**, dla $e < 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
- **parabolą**, dla $e = 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$x^2 = 2dy,$$
- **hiperbolą**, dla $e > 1$, czyli zbiorem opisanym w pewnym prostopadłym układzie współrzędnych równaniem:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Definicja

Wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ nazwiemy **jednorodnym** stopnia i, jeśli jest on sumą jednomianów stopnia i.

Przykłady.

- Wielomian $F[x, y] = x^2y + y^3$ jest jednorodny.
- Wielomian $F[x, y, z] = x^3 + y^3 + xy^2 - xyz$ jest jednorodny.

Oczywista uwaga

Jeśli funkcji wielomianowej $f : K^{n+1} \to K$ odpowiada w pewnym układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ wielomian jednorodny $F \in K[x_0, \ldots, x_n]$, to jeśli dla pewnego $p_0 + t_0\alpha_0 + \ldots + t_n\alpha_n$ mamy $f(t_0, \ldots, t_n)$, to dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0.$$

Definicja

Powiemy, że funkcja wielomianowa $f(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ na K^{n+1} **zeruje się w punkcie** $\widetilde{x} = (\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n) \in \mathbb{P}^n$, jeśli $f(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ dla dowolnych współrzędnych jednorodnych punktu $\widetilde{x}$. Innymi słowy, dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = 0.$$

Definicja

Powiemy, że funkcja wielomianowa $f(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ na K^{n+1} **zeruje się w punkcie** $\widetilde{x} = (\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n) \in \mathbb{P}^n$, jeśli $f(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ dla dowolnych współrzędnych jednorodnych punktu $\widetilde{x}$. Innymi słowy, dla każdego niezerowego $\lambda \in K$ mamy:

$$f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = 0.$$

Jeśli $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_m$, gdzie F_i jest sumą wszystkich jednomianów stopnia i w F (tzw. **składowa jednorodna** stopnia i) jest wielomianem odpowiadającym f w pewnym układzie bazowym, zaś f_i są funkcjami wielomianowymi, którym w układzie tym odpowiadają F_i, to (ciało K jest nieskończone) z warunku

$$0 = f(\lambda\zeta_0, \ldots, \lambda\zeta_n) = f_0 + \lambda f_1(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) + \ldots + \lambda^m f_m(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$$

dla każdego $\lambda \neq 0$ wynika, że $f_i(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) = 0$, dla każdego i. Krótko mówiąc: jeśli wielomian zeruje się w pewnym punkcie przestrzeni rzutowej, to każda jego składowa jednorodna zeruje sie na tym punkcie.

Definicja

Niech g_i będą funkcjami wielomianowymi na K^{n+1} i niech G_i będą odpowiadającymi im (w standardowym ukł. bazowym) wielomianami jednorodnymi. Zbiór $S \subset \mathbb{P}^n$ punktów $(\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n)$ spełniających warunki:

$$\begin{cases} g_1(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) & = 0 \\ \qquad \vdots & \\ g_k(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) & = 0, \end{cases}$$

nazywamy **zbiorem algebraicznym (rzutowym).**

Teoria rzutowych zbiorów algebraicznych (zwłaszcza nad ciałem algebraicznie domkniętym) jest punktem wyjścia klasycznej geometrii algebraicznej.
Warto zapoznać się ze świetnymi materiałami prof. A. Nowickiego (UMK): `https://www-users.mat.umk.pl/~anow/ps-dvi/rzu-sd.pdf`.

Związek z mapami afinicznymi. Załóżmy, dla prostoty, że zbiór algebraiczny S opisany jest w standardowym układzie bazowym równaniem

$$g(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Wówczas równanie zbioru S w mapie U_{x_0} to

$$f(u_1, \ldots, u_n) = g(1, \alpha_1/\alpha_0, \ldots, \alpha_n/\alpha_0) = 0,$$

gdzie f jest funkcją wielomianową na przestrzeni afinicznej $x_0 = 1$ w K^{n+1}, zaś $u_1, \ldots, u_n$ – lokalnymi współrzędnymi afinicznymi.

Związek z mapami afinicznymi. Załóżmy, dla prostoty, że zbiór algebraiczny S opisany jest w standardowym układzie bazowym równaniem

$$g(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Wówczas równanie zbioru S w mapie U_{x_0} to

$$f(u_1, \dots, u_n) = g(1, \alpha_1/\alpha_0, \dots, \alpha_n/\alpha_0) = 0,$$

gdzie f jest funkcją wielomianową na przestrzeni afinicznej $x_0 = 1$ w K^{n+1}, zaś $u_1, \dots, u_n$ – lokalnymi współrzędnymi afinicznymi. Z drugiej strony, jeśli zbiór S_0 jest opisany w lokalnych współrzędnych U_0 przez równanie $f(u_1, \dots, u_n) = 0$, gdzie f jest pewnym wielomianem, niekoniecznie jednorodnym stopnia m, to wielomian

$$g(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = (\alpha_0)^m \cdot f(\alpha_1/\alpha_0, \dots, \alpha_n/\alpha_0)$$

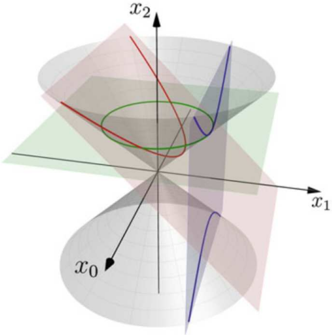
jest jednorodny (proszę sprawdzić!). Ponadto

$$g(1, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n),$$

więc jeśli zbiór S jest opisany w $\mathbb{P}^n$ równaniem $g = 0$, to $S \cap U_{x_0} = S_0$.

Kluczowy przykład. Rozważmy podzbiór $\mathbb{RP}^2$ złożony z punktów o współrzędnych jednorodnych $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniających:

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2.$$



Źródło: *Algebra I, Textbook for Students of Mathematics*.

- w mapie standardowej U_{x_1} opisanej równaniem $x_1 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_1}, u_2 = \frac{x_2}{x_1}$ ma równanie hiperboli:

$$u_2^2 - u_0^2 = 1.$$

- w mapie standardowej U_{x_2} opisanej równaniem $x_2 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_2}, u_2 = \frac{x_1}{x_2}$ ma równanie okręgu:

$$u_0^2 + u_1^2 = 1.$$

- w mapie niestandardowej $U_{x_1+x_2}$ opisanej równaniem $x_1 + x_2 = 1$, we współrzędnych: $t = \frac{x_0}{x_1+x_2}, u = \frac{x_2-x_1}{x_2+x_1}$ ma równanie paraboli:

$$t^2 = u.$$

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Przykład. Przekształcenie

$$\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 : x_0 : x_2)$$

jest rzutowe. Spróbujmy zobaczyć jak wygląda *ślad* tego przekształcenia w mapie U_{x_0}. Kładąc $x_0 = 1$ dostajemy przekształcenie afiniczne:

$$\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1).$$

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Przykład. Przekształcenie $\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 : x_0 : x_2)$ jest rzutowe. Spróbujmy zobaczyć jak wygląda *ślad* tego przekształcenia w mapie U_{x_0}. Kładąc $x_0 = 1$ dostajemy przekształcenie afiniczne: $\phi(u_1, u_2) = (1/u_1, u_2/u_1)$.

Zauważmy, że kładąc $1/u_1 = u_1'$ oraz $u_2/u_1 = u_2'$ widzimy, że przeciwobraz okręgu $(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1$ jest hiperbolą: $1 = u_2^2 - u_1^2$, bo:

$$(u_1')^2 + (u_2')^2 = 1 \iff \frac{x_0^2}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} = 1 \iff x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 \iff u_1^2 - u_2^2 = 1.$$

Definicja

Niech $f = (f_0, \dots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \dots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym.**

Niech $\overline{f_i} : K^n \to K$ będzie funkcją afiniczną powstałą z funkcji liniowych $f_i : K^{n+1} \to K$ przez podstawienie $x_0 = 1$. Mamy (nie wszędzie określone):

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto (\frac{\overline{f_1}}{\overline{f_0}}, \frac{\overline{f_2}}{\overline{f_0}}, \dots, \frac{\overline{f_n}}{\overline{f_0}})$$

przekształcenie przestrzeni afinicznej K^n, utożsamianej z U_{x_0} (w siebie).

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Przykład. Przekształcenie zadane we współrzędnych lokalnych w U_{x_0} wzorem

$$(u_1, u_2) \mapsto \left(\frac{2u_1}{1+u_2}, \frac{1-u_2}{1+u_2}\right)$$

przekształca parabolę $u_2 = u_1^2$ na okrąg.

Definicja

Niech $f = (f_0, \ldots, f_n) \in \mathrm{End}(K^{n+1})$ będzie izomorfizmem (można myśleć, że $f_i \in (K^{n+1})^*$). Wówczas dla $x = (x_0, \ldots, x_n)$ przyporządkowanie:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \ldots : f_n(x))$$

nazywamy **przekształceniem rzutowym**.

Twierdzenie (dowód - A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry*, tom II, rozdział 5.4)

Każda hiperpowierzchnia rzutowa stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni rzutowej na $\mathbb{R}$ jest rzutowo równoważna (proszę sformułować definicję!) dokładniej jednej hiperpowierzchni opisanej we współrzędnych jednorodnych równaniem:

$$x_0^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \quad [r/2] \leq s < r.$$

Szereg dodatkowych uwag można też znaleźć w notatkach prof. Webera.

Odnośniki do ważnych zagadnień dotyczących przestrzeni rzutowych.

- Dasze aspekty przestrzenie rzutowych, stosunkowo elementarnie odpowiedziane (z afinicznego i rzutowego punktu widzenia): `https://ziyuzhang.github.io/ma40188/`
- Aspekty kombinatoryczne przestrzeni rzutowych:
  `http://www-groups.mcs.st-andrews.ac.uk/~pjc/Teaching/MT5821/3b/w6.pdf`,
  `https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf`,
  lub bardziej poglądowo:
  M. Skałba: *Naprawdę ciekawa gra*, Delta, kwiecień 2014.
- Geometria przekształceń rzutowych w: M. Audin, *Geometry*, Springer 2004: `https://www.springer.com/gp/book/9783540434986`.
- Dodałem też dwie lektury nieobowiązkowe dotyczące tzw. enumeratywnej geometrii, która zawiera bardzo wiele ciekawych wątków z geometrii rzutowej, zwłaszcza związanych z prostymi i stożkowymi.