Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 24, 1.06.2021 r.

Zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq 2$.

Definicja

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Mówimy, że **wielomian** $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$ **odpowiada funkcji** f w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, jeśli

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}, \text{ dla każdych } s_1, \ldots, s_n \in K.$$

Liczbę $\deg F$ nazywamy **stopniem funkcji wielomianowej** f.

Przykład. Funkcja $f : K^3 \to K$ postaci $f(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2$ jest wielomianowa:

- dla ukł. baz. $(0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ oraz $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$,
- dla ukł. baz. $(0, 0, 0); (1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$ oraz $G(y_1, y_2, y_3) = y_2$, bo
$$(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 0) - t_2(1, -1, 0) + (t_1 + t_2)(1, 0, 1) + (t_3 - t_1 - t_2)(0, 0, 1).$$

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **algebraicznym**, jeśli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, \ldots, f_k$ na przestrzeni H takie, że:

$$X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}.$$

- Jeżeli w ukł. baz. $p_0; \mathcal{A}$ funkcjom $f_1, \ldots, f_k$ odpowiadają wielomiany $F_1, \ldots, F_k$, to mówimy, że w tym ukł. baz. X jest **opisywany wielomianami** $F_1, \ldots, F_k$, albo **opisywany układem równań** $F_1 = 0, \ldots, F_k = 0$.
- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **hiperpowierzchnią**, jeśli istnieje funkcja wielomianowa f na H taka, że $X = \{p \in H \mid f(p) = 0\}$. Mówimy wtedy, że **hiperpowierzchnia** X **jest opisywana przez funkcję** f.
- **Stopniem hiperpowierzchni** X, ozn $\deg(X)$, nazywamy najniższy ze stopni wielomianów opisujących X, a równanie $f(x) = 0$, które opisuje X i $\deg(f) = \deg(X)$ nazywamy **równaniem minimalnym** X.

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnie H_1, H_2 w przestrzeni afinicznej H są **afinicznie izomorficzne** (inaczej mówiąc: mają **ten sam typ afiniczny**), jeśli istnieje izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ taki, że $h(H_1) = H_2$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Interesują nas także inne typy równoważności hiperpowierzchni: typ izometryczny i typ rzutowy, o czym powiemy na kolejnym wykładzie.

Twierdzenie

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
(i) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} \quad r = r(f) & \textit{oraz} & a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
\textit{lub} & & & & \\
(ii) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} \quad r = r(f) < n & \textit{oraz} & a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
(a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} & a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
(b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} & a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Uwaga (była ostatnio)

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz symetryczną $A \in M_{n \times n}(K)$, macierz $B \in M_{1 \times n}(K)$ oraz element $c \in K$ tak, że biorąc $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T A x + Bx + c.$$

Uwaga pomocnicza (będzie teraz)

Załóżmy, że funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 odpowiada w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ postaci $F = x^T A x + Bx + c$, gdzie $x = [x_1 \ldots x_n]^T$. Wówczas w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ funkcji f odpowiada wielomian

$$G = x^T A' x + B' x + c',$$

przy czym $A' = C^T A C$, gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:

$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

  Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:

$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

  Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.

- Biorąc zatem $x = Cy + w$, gdzie $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ gdzie $w = [w_1 \ldots w_n]^T$ spełnia

$$q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n,$$

  dostajemy

$$\begin{aligned} x^TAx + Bx + c &= (y^TC^T + w^T)A(Cy + w) + B(Cy + w) + c = \\ &= y^T(C^TAC)y + y^TC^TAw + w^TACy + w^TAw + BCy + Bw + c. \end{aligned}$$

Dowód.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Załóżmy, że pewien punkt ma w ukł. bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ współrzędne:
$$q_0 + y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n = p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$
Niech też $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ oraz $y = [y_1 \ldots y_n]^T$.
- Biorąc zatem $x = Cy + w$, gdzie $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ gdzie $w = [w_1 \ldots w_n]^T$ spełnia
$$q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n,$$
dostajemy
$$x^T Ax + Bx + c = (y^T C^T + w^T)A(Cy + w) + B(Cy + w) + c =$$
$$= y^T(C^T AC)y + y^T C^T Aw + w^T ACy + w^T Aw + BCy + Bw + c.$$
- Przy tym $y^T C^T Aw = (y^T C^T Aw)^T = w^T ACy$. Stąd teza zachodzi dla:
$$A' = C^T AC, \quad B' = 2w^T AC + BC, \quad c' = w^T Aw + Bw + c.$$

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana będzie w ukł. baz. $(0,0); (1,0), (0,1)$ przez

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 + 6 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 6.$$

Weźmy układ bazowy $q_0 = (1,2); \beta_1 = (-2,5), \beta_2 = (1,1)$. Wówczas kładąc $p_0 = (0,0)$, $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1)$, $\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$, $\mathcal{B} = ((-2,5),(1,1))$ mamy:

$$C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A zatem

$$A' = C^T A C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 26 \\ 26 & 15 \end{bmatrix}.$$

$$B' = 2w^T A C + BC = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$c' = w^T A w + B w + c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 6.$$

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T A x + Bx + c$, gdzie $A \in M_{n\times n}(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_{n\times n}(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{r(f)}, 0, \ldots, 0)$.

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A \in M_{n\times n}(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_{n\times n}(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{r(f)}, 0, \ldots, 0)$.

- Rozpatrzmy układ bazowy $p_0; \mathcal{B}$, w którym baza $\mathcal{B}$ zadana jest warunkiem $M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C$. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian

$$G = y^T C^T ACy + B'y + c' = a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + b_1' y_1 + \ldots + b_n' y_n + c'.$$

Dowód twierdzenia.

- Niech $p_0; \mathcal{A}$ będzie dowolnym układem bazowym przestrzeni H. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian $F = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A \in M_{n\times n}(K)$ jest macierzą symetryczną, $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz $c \in K$. Niech $C \in M_{n\times n}(K)$ będzie taką macierzą odwracalną, że $C^T AC = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{r(f)}, 0, \dots, 0)$.
- Rozpatrzmy układ bazowy $p_0; \mathcal{B}$, w którym baza $\mathcal{B}$ zadana jest warunkiem $M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = C$. W układzie tym funkcji f odpowiada wielomian
$$G = y^T C^T ACy + B'y + c' = a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + b_1' y_1 + \ldots + b_n' y_n + c'.$$
- Inaczej mówiąc G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$, gdzie $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ oraz $y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$. Mamy też:
$$a_1 \left(y_1 + \frac{b_1'}{2a_1} \right)^2 + \ldots + a_r \left(y_r + \frac{b_r'}{2a_r} \right)^2 + b_{r+1}' y_{r+1} + \ldots + b_n' y_n - \frac{(b_1')^2}{4a_1} - \ldots - \frac{(b_r')^2}{4a_r} + c'.$$
Musimy tak dobrać $q_0; \mathcal{C}$, aby przez pewną afiniczną zamianę zmiennych przeprowadzić G do postaci (i) lub (ii). Rozważmy dwa przypadki.

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1 + \frac{b_1'}{2a_1}\right)^2 + \ldots + a_r\left(y_r + \frac{b_r'}{2a_r}\right)^2 + b_{r+1}'y_{r+1} + \ldots + b_n'y_n - \frac{(b_1')^2}{4a_1} - \ldots - \frac{(b_r')^2}{4a_r} + c'.$$

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1+\frac{b_1'}{2a_1}\right)^2+\ldots+a_r\left(y_r+\frac{b_r'}{2a_r}\right)^2+b_{r+1}'y_{r+1}+\ldots+b_n'y_n-\frac{(b_1')^2}{4a_1}-\ldots-\frac{(b_r')^2}{4a_r}+c'.$$

- Przypadek 1. $b_{r+1}' = \ldots = b_n' = 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + c$ typu (i) otrzymujemy z G przez podstawienie postaci:

$$z_i = y_i + \frac{b_i'}{2a_i},\ \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_i = y_i,\ \text{dla } i = r+1, \ldots, n.$$

- Podsumowując: G jest otrzymany z F przez podstawienie $x = Cy$ oraz:

$$a_1\left(y_1+\frac{b_1'}{2a_1}\right)^2+\ldots+a_r\left(y_r+\frac{b_r'}{2a_r}\right)^2+b_{r+1}'y_{r+1}+\ldots+b_n'y_n-\frac{(b_1')^2}{4a_1}-\ldots-\frac{(b_r')^2}{4a_r}+c'.$$

- Przypadek 1. $b_{r+1}' = \ldots = b_n' = 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + c$ typu (i) otrzymujemy z G przez podstawienie postaci:

$$z_i = y_i + \frac{b_i'}{2a_i},\ \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_i = y_i,\ \text{dla } i = r+1, \ldots, n.$$

- Przypadek 2. Pewna z liczb $b_{r+1}', \ldots, b_n'$ jest niezerowa. Po ewentualnym przenumerowaniu zmiennych możemy przyjąć, że $b_n \neq 0$. Wówczas wielomian $a_1z_1^2 + \ldots + a_rz_r^2 + x_n$ typu (ii) otrzymujemy z G przez podstawienie:

$$z_i = \begin{cases} y_i + \frac{b_i'}{2a_i}, & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r, \\ y_i, & \text{dla } i = r+1, \ldots, n-1, \\ b_{r+1}'y_{r+1} + \ldots + b_n'y_n - \frac{(b_1')^2}{4a_1} - \ldots - \frac{(b_r')^2}{4a_r} + c', & \text{dla } i = n. \end{cases}$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$\begin{array}{lll} (c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n, \\ (c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1, \\ (c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1. \end{array}$$

Wniosek nad $\mathbb{C}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{C}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań:

$$
\begin{array}{lll}
(c1) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + 1 = 0, & gdzie \quad 1 \leq r \leq n, \\
(c2) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0, & gdzie \quad 1 \leq r \leq n-1, \\
(c3) & x_1^2 + \ldots + x_r^2 + x_n = 0, & gdzie \quad 1 \leq r \leq n-1.
\end{array}
$$

Dowód. W ukł. baz. $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana jednym z równań:

(a) $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n$, oraz , $a_1, \ldots, a_r \neq 0, c \in \{0, 1\}$,

(b) $a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n-1$ oraz $a_1, \ldots, a_r \neq 0$.

Niech $d_i^2 = a_i$. Wówczas w ukł. baz. $p_0; \frac{1}{d_1}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{d_r}\alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana równaniem:

- (c1), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (a) z $c = 1$,
- (c2), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (a) z $c = 0$,
- (c3), gdy w $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ była ona opisana równaniem typu (b).

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n - 1.
\end{array}
$$

Wniosek nad $\mathbb{R}$

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w $n \geq 2$ wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}
$$

Dowód. W ukł. baz. $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hiperpow. X jest opisana jednym z równań:

(a) $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + c = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n$, oraz , $a_1, \ldots, a_r \neq 0, c \in \{0, 1\}$,

(b) $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + x_n = 0$, gdzie , $1 \leq r \leq n-1$ oraz $a_1, \ldots, a_r \neq 0$.

Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że $a_i > 0$ dla $i \leq s$ oraz $a_i < 0$ dla $i \geq s+1$, dla pewnego $s \geq 0$. Niech $d_i^2 = |a_i|$, dla $i = 1, \ldots, r$. Wówczas w układzie bazowym $p_0; \frac{1}{d_1}\alpha_1, \ldots, \frac{1}{d_r}\alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ hiperpowierzchnia X jest opisana równaniem typu (r1) lub (r2) lub (r3).

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnia X stopnia 2, w n wymiarowej przestrzeni afinicznej H jest **właściwa**, jeśli X nie jest zawarta w $n-1$ wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni H.

Przykłady.

- Sfera $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
- Zbiór $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ nie jest hiperpowierzchnią właściwą. Jest to prosta w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga. W starszych źródłach można przeczytać, że hiperpowierzchnia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest *właściwa*, jeśli dla dowolnych równań minimalnych $F_1 = 0$ oraz $F_2 = 0$ opisujących X w pewnym układzie bazowym istnieje skalar $\lambda \in K$, że $F_1 = \lambda F_2$. Definicja ta nie jest równoważna z podaną na ostatnim slajdzie. W monografii „Algebra liniowa z geometrią" prof. Białynickiego-Biruli można znaleźć niebanalne rezultaty dotyczące hiperpowierzchni *właściwych* ale należy pamiętać, że niektóre z nich można w pewnych przypadkach zanurzyć w hiperpłaszczyznę.

- każda hiperpłaszczyzna jest hiperpowierzchnią *właściwą*,
- $(*)$ wykres dowolnej funkcji wielomianowej $f : H \to K$ określonej na przestrzeni afinicznej H, czyli zbiór złożony z par $(h, f(h))$ w przestrzeni afinicznej $H \times K$ jest hiperpowierzchnią *właściwą* (dlaczego?),
- każda hiperpowierzchnia w przestrzeni afinicznej H nad ciałem algebraicznie domkniętym różna od całej przestrzeni H jest hiperpowierzchnią *właściwą* (wynik ten wymaga m.in. twierdzenia Hilberta o zerach wiedzy o istnieniu i własnościach NWD wielomianów wielu zmiennych nad ciałem).

Twierdzenie, z którego skorzystamy

Hiperpowierzchnia stopnia 2 jest właściwa $\iff$ dla każdych opisjących ją w pewnym układzie bazowym równań stopnia 2 postaci $F_1 = 0, F_2 = 0$ istnieje $\lambda \in K$ takie, że $F_1 = \lambda F_2$.

Założenie właściwości jest konieczne. Oto przykład. Mamy:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 0\},$$

ale dla wielomianów $F = x_1^2 + x_2^2$ oraz $G = x_1^2 + 2x_2^2$ nie istnieje $c \in K$, że $G = cF$.

Plan dowodu:

- pokażemy, że dla każdej hiperpowierzchni właściwej stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$ istnieje w tejże $\mathbb{R}^n$ prosta, która przecina się z nią w dokładnie dwóch punktach,
- pokażemy, że funkcja wielomianowa stopnia 2 (opisująca hiperpowierzchnię) ograniczona do punktów leżących na prostej opisanych w postaci parametrycznej $q_0 + tw$ *zachowuje się* jak funkcja kwadratowa od t,
- zdefiniujemy λ i pokażemy, że $F_1 - \lambda F_2$ jest zerowy na całym $\mathbb{R}^n$.

Dowód. Zakładamy, że hiperpowierzchnia $H \subset \mathbb{R}^n$ jest właściwa, czyli w pewnym układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ opisana jest jednym z równań:

$$\begin{array}{lll} (r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\ (r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r < n, \\ (r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0, & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1. \end{array}$$

wówczas następująca prosta L przecina H dokładnie w dwóch punktach:

- w przypadku (r1): opisana w $p_0; \mathcal{A}$ równaniami: $x_j = 0$, dla $j \neq r$ co daje dokładnie dwa punkty należące do H: $(\underbrace{0, \ldots, \pm 1}_{r}, 0, \ldots, 0)$,
- w przypadku (r2): opisana w $p_0; \mathcal{A}$ równaniami $x_r = 1, x_j = 0$, dla $r \neq j > 1$ co daje dokładnie dwa punkty należące do H: $(\underbrace{\pm 1, 0, \ldots, 0, 1}_{r}, 0, \ldots, 0)$,
- w przypadku (r3): opisana w $p_0; \mathcal{A}$ równaniami: $x_n = -1, x_j = 0$, dla $n > j > 1$ co daje dokładnie dwa punkty należące do H: $(\pm 1, 0 \ldots, 0, -1)$.

A zatem hiperpowierzchnia właściwa stopnia 2 (patrz zwłaszcza równanie (r2)) przecina się z pewną prostą na dokładnie dwóch punktach.

- Niech $f(p) = 0$ oraz $g(p) = 0$ będą równaniami pewnej hiperpowierzchni właściwej H stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ funkcjom tym odpowiadają wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

- Niech $f(p) = 0$ oraz $g(p) = 0$ będą równaniami pewnej hiperpowierzchni właściwej H stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ funkcjom tym odpowiadają wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.
- Niech $F(x) = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A = A^T$, $B \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Niech $F_2(x) = x^T Ax$ oraz niech funkcja f_2 będzie zadana przez F_2 na $p_0; \mathcal{A}$.

- Niech $f(p) = 0$ oraz $g(p) = 0$ będą równaniami pewnej hiperpowierzchni właściwej H stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ funkcjom tym odpowiadają wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.
- Niech $F(x) = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A = A^T$, $B \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Niech $F_2(x) = x^T Ax$ oraz niech funkcja f_2 będzie zadana przez F_2 na $p_0; \mathcal{A}$.
- Jeśli $q + \operatorname{lin}(w)$ jest prostą w $\mathbb{R}^n$ oraz wektory x, z zawierają współrzędne q oraz w odpowiednio w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ oraz bazie $\mathcal{A}$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
F(x+tz) &= (x+tz)^T A(x+tz) + (x+tz)B + c = \\
&= t^2(z^T Az) + t(2x^T A + B)z + F(x).
\end{aligned}
$$

- Niech $f(p) = 0$ oraz $g(p) = 0$ będą równaniami pewnej hiperpowierzchni właściwej H stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ funkcjom tym odpowiadają wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.
- Niech $F(x) = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A = A^T$, $B \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Niech $F_2(x) = x^T Ax$ oraz niech funkcja f_2 będzie zadana przez F_2 na $p_0; \mathcal{A}$.
- Jeśli $q + \mathrm{lin}(w)$ jest prostą w $\mathbb{R}^n$ oraz wektory x, z zawierają współrzędne q oraz w odpowiednio w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ oraz bazie $\mathcal{A}$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
F(x + tz) &= (x + tz)^T A(x + tz) + (x + tz)B + c = \\
&= t^2(z^T Az) + t(2x^T A + B)z + F(x).
\end{aligned}
$$

- Zatem możemy zapisać:

$$f(q + tw) = at^2 + bt + c, \qquad \text{gdzie } a = f_2(w), c = f(q) \qquad (*)$$

- Niech $f(p) = 0$ oraz $g(p) = 0$ będą równaniami pewnej hiperpowierzchni właściwej H stopnia 2 w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ funkcjom tym odpowiadają wielomiany $F, G \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.
- Niech $F(x) = x^T Ax + Bx + c$, gdzie $A = A^T$, $B \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ oraz $c \in \mathbb{R}$. Niech $F_2(x) = x^T Ax$ oraz niech funkcja f_2 będzie zadana przez F_2 na $p_0; \mathcal{A}$.
- Jeśli $q + \mathrm{lin}(w)$ jest prostą w $\mathbb{R}^n$ oraz wektory x, z zawierają współrzędne q oraz w odpowiednio w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ oraz bazie $\mathcal{A}$, to mamy:

$$\begin{aligned} F(x+tz) &= (x+tz)^T A(x+tz) + (x+tz)B + c = \\ &= t^2(z^T Az) + t(2x^T A + B)z + F(x). \end{aligned}$$

- Zatem możemy zapisać:

$$f(q+tw) = at^2 + bt + c, \quad \text{gdzie } a = f_2(w), c = f(q) \qquad (*)$$

- Istnieje prosta $L = q_0 + \mathrm{lin}(w_0)$ przecinająca H w dokładnie dwóch punktach (dwie wartości t, że $f(q_0 + tw_0) = 0$). Z $(*)$ wynika zatem, że $a = f_2(w_0) \neq 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a > 0$ (można zastąpić f przez $-f$) oraz możemy przyjąć $f(q_0) < 0$ (przesuwając w razie potrzeby q_0 po L).

- Niech $\lambda = \frac{g(q_0)}{f(q_0)}$ i niech $E = \{q \in \mathbb{R}^n \mid g(q) = \lambda f(q)\}$. Pokażemy, że $\mathbb{R}^n = E$.

- Niech $\lambda = \frac{g(q_0)}{f(q_0)}$ i niech $E = \{q \in \mathbb{R}^n \mid g(q) = \lambda f(q)\}$. Pokażemy, że $\mathbb{R}^n = E$.
- Z definicji $H \cup \{q_0\} \subseteq E$ (dla $p \in H$ mamy z definicji $f(p) = g(p) = 0$).
  Co więcej, stosując $(*)$ do funkcji g oraz λf widzimy, że każda prosta w $\mathbb{R}^n$ zawierająca trzy punkty zbioru E, w istocie zawiera się w E. Krótko mówiąc: $(g - \lambda f)(x + tz)$ jest co najwyżej funkcją kwadratową od r, a zeruje się na E.

- Niech $\lambda = \frac{g(q_0)}{f(q_0)}$ i niech $E = \{q \in \mathbb{R}^n \,|\, g(q) = \lambda f(q)\}$. Pokażemy, że $\mathbb{R}^n = E$.
- Z definicji $H \cup \{q_0\} \subseteq E$ (dla $p \in H$ mamy z definicji $f(p) = g(p) = 0$). Co więcej, stosując $(*)$ do funkcji g oraz λf widzimy, że każda prosta w $\mathbb{R}^n$ zawierająca trzy punkty zbioru E, w istocie zawiera się w E. Krótko mówiąc: $(g - \lambda f)(x + tz)$ jest co najwyżej funkcją kwadratową od r, a zeruje się na E.
- Weźmy dowolną prostą $L_w = q_0 + \mathrm{lin}(w)$ zawieszoną w q_0 taką, że $f_2(w) > 0$. Z $(*)$ dla f na L_w wnioskujemy, że zbiór $L_w \cap H$ jest dwupunktowy (przecież f zeruje się na $L_w \cap H$, a $f(q_0) < 0$ oraz $a = f_2(w) > 0$). Co więcej $q_0 \in E \cap L_w$. Zatem $L_w \subseteq E$. A zatem dla wszystkich w takich, że $f_2(w) > 0$ mamy $L_w \subset E$.

- Niech $\lambda = \frac{g(q_0)}{f(q_0)}$ i niech $E = \{q \in \mathbb{R}^n \,|\, g(q) = \lambda f(q)\}$. Pokażemy, że $\mathbb{R}^n = E$.
- Z definicji $H \cup \{q_0\} \subseteq E$ (dla $p \in H$ mamy z definicji $f(p) = g(p) = 0$).
  Co więcej, stosując $(*)$ do funkcji g oraz λf widzimy, że każda prosta w $\mathbb{R}^n$ zawierająca trzy punkty zbioru E, w istocie zawiera się w E. Krótko mówiąc: $(g - \lambda f)(x + tz)$ jest co najwyżej funkcją kwadratową od r, a zeruje się na E.
- Weźmy dowolną prostą $L_w = q_0 + \mathrm{lin}(w)$ zawieszoną w q_0 taką, że $f_2(w) > 0$. Z $(*)$ dla f na L_w wnioskujemy, że zbiór $L_w \cap H$ jest dwupunktowy (przecież f zeruje się na $L_w \cap H$, a $f(q_0) < 0$ oraz $a = f_2(w) > 0$). Co więcej $q_0 \in E \cap L_w$. Zatem $L_w \subseteq E$. A zatem dla wszystkich w takich, że $f_2(w) > 0$ mamy $L_w \subset E$.
- Weźmy teraz dowolne $q = q_0 + u \in \mathbb{R}^n$. Punkty prostej $L_q = q + \mathrm{lin}(w_0)$ możemy przedstawić w postaci $q_0 + (u + tw_0)$. A zatem powtarzając argumentację dla wzoru $(*)$ możemy zapisać:

  $$f_2(u + tw_0) = t^2 f_2(w_0) + tb + f_2(u) > 0,$$

  dla dostatecznie dużych t (bo $f_2(w_0) > 0$). Dla takich t punkty $q_0 + (u + tw_0)$ prostej L_q są w E, a więc cała L_q jest w E i stąd $q \in L_q \in E$. A zatem $\mathbb{R}^n = E$.

Definicja

Mówimy, że punkt $p \in H$ jest **środkiem symetrii hiperpowierzchni** $X \subset H$, jeśli dla każdego punktu q należącego do X punkt $p - \overrightarrow{pq}$ też należy do X.

Inaczej mówiąc: $p \in H$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X, jeśli dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ zachodzi równoważność

$$p + \alpha \in X \Leftrightarrow p - \alpha \in X.$$

Zatem punkt p jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X wtedy i tylko wtedy, gdy symetria względem punktu p (czyli jednokładność o środku p i skali -1) przeprowadza X na X.

Przykłady:

- okrąg opisany w $\mathbb{R}^2$ równaniem $(x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1$ ma środek symetrii w punkcie $(2, 0)$.
- parabola opisana w $\mathbb{R}^2$ równaniem $x_1^2 + x_2 = 0$ nie ma środka symetrii.

Twierdzenie A

Niech X będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + d = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$. Wówczas punkt p jest środkiem symetrii zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w tym układzie bazowym współrzędne

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n.$$

Twierdzenie B

Niech X będzie hiperpowierzchnią stopnia 2 w H opisaną w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + x_n = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0, r < n$. Wówczas X nie ma środka symetrii.

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne
$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$
to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:
$$\begin{aligned} p + \alpha &= p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ &= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne
$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$
to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:
$$p + \alpha = p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n =$$
$$= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n.$$
- Jasne jest więc, że $p + \alpha \in X$ (czyli $a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + d = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p - \alpha \in X$ (czyli $a_1(-y_1)^2 + \ldots + a_r(-y_r)^2 + d = 0$).

Dowód twierdzenia A.

- Jeśli p ma w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ współrzędne
$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n,$$
to dla każdego wektora $\alpha = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ mamy:
$$\begin{aligned} p + \alpha &= p_0 + s_{r+1}\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n = \\ &= p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_r\alpha_r + (s_{r+1} + y_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots + (s_n + y_n)\alpha_n. \end{aligned}$$
- Jasne jest więc, że $p + \alpha \in X$ (czyli $a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2 + d = 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p - \alpha \in X$ (czyli $a_1(-y_1)^2 + \ldots + a_r(-y_r)^2 + d = 0$).
- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem
$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{1}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \qquad (2)$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{2}$$

- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$. Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $2s_1 - z_1, \ldots, 2s_n - z_n$, a więc: $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli

$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{3}$$

- Na odwrót: przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii hiperpowierzchni X. Wykażemy, że $s_1 = s_2 = \ldots = s_r = 0$. Niech $z \in X$ ma współrzędne $z_1, \ldots, z_n$. Zatem

$$a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + d = 0 \tag{2}$$

- Niech $\alpha = \overrightarrow{pz}$, czyli $p + \alpha = z$. Skoro $z = p + \alpha \in X$, to z faktu, że p jest środkiem symetrii wynika, że $p - \alpha \in X$. Punkt $p - \alpha$ ma współrzędne $2s_1 - z_1, \ldots, 2s_n - z_n$, a więc: $a_1(2s_1 - z_1)^2 + \ldots + a_r(2s_r - z_r)^2 + d = 0$ czyli

$$a_1(4s_1^2 - 4s_1 z_1 + z_1^2) + \ldots + a_r(4s_r^2 - 4s_r z_r + z_r^2) + d = 0. \tag{3}$$

- Odejmując (2) od (3) i dzieląc przez 4: $a_1(s_1^2 - s_1 z_1) + \ldots + a_r(s_r^2 - s_r z_r) = 0$, czyli:

$$a_1 s_1 z_1 + \ldots + a_r s_r z_r - a_1 s_1^2 - \ldots - a_r s_r^2 = 0. \tag{4}$$

Otrzymaliśmy: współrzędne $z_1, \ldots, z_n$ każdego punktu $z \in X$ spełniają (4). A więc X zawarty jest w zbiorze spełniającym (4). Gdyby $s_i \neq 0$, dla pewnego $i = 1, \ldots, r$, to (4) opisywałoby $n - 1$ wymiarową podprzestrzeń afiniczną $M \subseteq H$ i mielibyśmy $X \subseteq M$, co przeczyłoby założeniu, że X jest właściwa.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy

$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{5}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. Punkt p należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{5}$$
- Niech α będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $T(H)$ współrzędne
$$-2s_1, 0, 0, \ldots 0.$$
Wówczas punkt $p + \alpha$ ma współrzędne
$$-s_1, s_2, \ldots, s_n$$
więc $p + \alpha \in X$. Stąd $p - \alpha \in X$, bo p to środek symetrii. Punkt $p - \alpha$ ma jednak współrzędne
$$3s_1, s_2, \ldots, s_n,$$
więc dostajemy
$$9a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n = 0. \tag{6}$$

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Odejmując (5) od (6) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$. Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (5) $s_n = 0$. Zatem p ma współrzędne
$$0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0.$$
Wówczas dla każdego wektora o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$ mamy $p + \beta \in X$ oraz $p - \beta \notin X$. A zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że p jest środkiem symetrii X.

Dowód twierdzenia B. Przypuśćmy, że punkt p o współrzędnych $s_1, \ldots, s_n$ jest środkiem symetrii X. Rozważamy dwa przypadki.

- Odejmując (5) od (6) dostajemy $8a_1 s_1^2 = 0$, a stąd $s_1 = 0$. Analogicznie dowodzimy jednak, że $s_2 = s_3 = \ldots = s_r = 0$, a stąd z (5) $s_n = 0$. Zatem p ma współrzędne
$$0, 0, \ldots, 0, s_{r+1}, \ldots, s_{n-1}, 0.$$
Wówczas dla każdego wektora o współrzędnych $z_1, \ldots, z_n$ spełniających $a_1 z_1^2 + \ldots + a_r z_r^2 + z_n = 0$ i $z_n \neq 0$ mamy $p + \beta \in X$ oraz $p - \beta \notin X$. A zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że p jest środkiem symetrii X.

- Przypadek 2. Punkt p nie należy do X. Wówczas mamy
$$a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n \neq 0.$$
Niech α będzie wektorem o współrzędnych $0, 0, \ldots, 0, a$, gdzie
$$a = -(a_1 s_1^2 + \ldots + a_r s_r^2 + s_n).$$
Wówczas $p + \alpha \in X$ zaś $p - \alpha \notin X$. Znowu sprzeczność.

Definicja

Niech $A = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ będzie jednomianem w $K[x_1, \dots, x_n]$. Przez $\frac{\partial}{\partial x_t}(A)$ oznaczać będziemy jednomian

$$i_t \cdot x_1^{i_1} \cdot x_{t-1}^{i_{t-1}} x_t^{i_t - 1} x_{t+1}^{i_{t+1}} \dots x_n^{i_n}.$$

Wielomian ten nazywać będziemy **pochodną cząstkową jednomianu** A **względem** x_t, dla $t = 1, \dots, n$. Dla pary jednomianów $A, B \in K[x_1, \dots, x_n]$ oraz $a, b \in K$ definiujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_t}(aA + bB) = a\frac{\partial}{\partial x_t}(A) + b\frac{\partial}{\partial x_t}(B).$$

W ten sposób definiujemy $\frac{\partial}{\partial x_t}$ na całym $K[x_1, \dots, x_n]$.

Np.: $\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^2 x_2^5) = 5x_1^2 x_2^4$, $\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 x_2^2 x_3 x_4) = x_1 x_2^2 x_4$, $\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 x_3 + 2x_1 + x_2) = x_3 + 2$.

Twierdzenie (dowód w skrypcie dr. Strojnowskiego - tw. 24.10)

Niech $H = \{p \in K^n \mid w(p) = 0\}$ będzie właściwą hiperpowierzchnią stopnia 2 opisaną w pewnym układzie bazowym wielomianem $W \in K[x_1, \ldots, x_n]$.Wówczas punkt $q \in K^n$ jest środkiem symetrii H wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(W)(q) = \frac{\partial}{\partial x_2}(W)(q) = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n}(W)(q) = 0.$$

Przykład. Weźmy powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ opisaną równaniem $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Pochodne cząstkowe wielomianu $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ to:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 2x_1, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 2x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = -2x_3,$$

zaś układ równań $2x_1 = 0, 2x_2 = 0$ oraz $-2x_3 = 0$ ma jedyne rozwiązanie $(0, 0, 0)$, które jest środkiem symetrii rozważanej hiperpowierzchni (należącym do niej).

Wniosek (o formach kanonicznych hiperpowierzchni właściwych)

Dla każdej hiperpowierzchni właściwej X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem:

$$
\begin{array}{lll}
(r1) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n, \\
(r2) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq s < r < n, \\
(r3) & x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} \quad 0 \leq s < r \leq n-1.
\end{array}
$$

(1) Jeśli X jest w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ opisana równaniem postaci (ri), zaś w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ – równaniem (rj), to $i = j$.

(2) Jeśli X jest opisywana równaniami postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$, to występująca w nich liczba r jest niezależna od wyboru układu bazowego.

(3) Jeśli X jest opisywana równaniami typu (r1), to występująca w nich liczba s jest we wszystkich równaniach taka sama. Jeśli X jest opisywana równaniem (r2) lub (r3), to dla każdych dwóch różnych takich równań występujące w nich liczby s są albo jednakowe, albo ich suma wynosi r.

Dowód części (1) wniosku. Twierdzimy, że jeśli X opisana jest równaniem postaci (r1), to X posiada środek symetrii, ale żaden jej środek symetrii nie należy do X.

- Istotnie, jeśli $p \in H$ jest środkiem symetrii powierzchni X opisanej w pewnym układzie bazowym równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + d = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$, wówczas p jest środkiem symetrii X wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w tym ukł. bazowym współrzędne $\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n$.

Dowód części (1) wniosku. Twierdzimy, że jeśli X opisana jest równaniem postaci (r1), to X posiada środek symetrii, ale żaden jej środek symetrii nie należy do X.

- Istotnie, jeśli $p \in H$ jest środkiem symetrii powierzchni X opisanej w pewnym układzie bazowym równaniem $a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2 + d = 0$, przy czym $a_1 \neq 0, \ldots, a_r \neq 0$, wówczas p jest środkiem symetrii X wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w tym ukł. bazowym współrzędne $\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n$.
- Nietrudno jednak widzieć, że jeśli X jest opisana równaniem
$$x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, \qquad (\dagger)$$
wówczas punkt o współrzędnych $\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, s_{r+1}, \ldots, s_n$ nie spełnia $(\dagger)$.

  Z tych samych powodów powierzchnia X opisana równaniem (r2) zawiera wszystkie swoje środki symetrii. Jeśli X spełnia równanie (r3), to jak wiemy nie ma środka symetrii. Omówione przypadki wzajemnie się wykluczają.

Dowód części pozostałych części wniosku

- Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$, gdzie $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oraz X opisana jest w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $G = 0$, gdzie $G \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$, przy czym F, G są wielomianami stopnia 2.

Dowód części pozostałych części wniosku

- Załóżmy, że hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ równaniem postaci $F = 0$, gdzie $F \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oraz X opisana jest w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $G = 0$, gdzie $G \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$, przy czym F, G są wielomianami stopnia 2.

- Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $C = M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $q_0 = p_0 + w_1\alpha_1 + \ldots + w_n\alpha_n$. Wówczas hiperpowierzchnia X jest opisana w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ równaniem $H = 0$, gdzie $H \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$ powstaje z F przez podstawienie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).

Dowód części pozostałych części wniosku

- Stąd macierze części kwadratowych wielomianów F, H są kongruentne nad $\mathbb{R}$, mają więc równe rzędy i sygnatury. Zauważmy też, że zarówno G, jak i H są wielomianami opisującymi hiperpowierzchnię właściwą X w tym samym układzie bazowym, a wiec zgodnie z twierdzeniem podanym wcześniej istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$H = cG.$$
- Macierze części kwadratowych wielomianów H oraz G (a zatem też wielomianów F i G) mają ten sam rząd, a ich sygnatury są równe z dokładnością do znaku (są równe gdy $c > 0$, są przeciwne, gdy $c < 0$).
- Jeśli równania $F = 0$ oraz $G = 0$ są w postaci (ri), to występująca w nich liczba r jest rzędem macierzy części kwadratowej. Zatem musi być ona taka sama w obydwu równaniach. To dowodzi (2).

Dowód części pozostałych części wniosku cd.

- Ponadto różnica $s-(r-s)=2s=r$ jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i=1,2,3$. Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r,s, dla G wynoszą r',s', to $2s-r=\pm(2s'-r')$, co uwzględniając $r=r'$ daje albo $2s-r=2s'-r$, czyli $s=s'$, albo $2s-r=-(2s'-r)$, czyli $s'=r-s$, co dowodzi (3) odnośnie hiperpowierzchni typu afinicznego (r2) lub (r3).

Dowód części pozostałych części wniosku cd.

- Ponadto różnica $s - (r - s) = 2s = r$ jest sygnaturą macierzy części kwadratowej równania postaci (ri), dla $i = 1, 2, 3$. Stąd jeśli rząd i sygnatura dla F wynoszą r, s, dla G wynoszą r', s', to $2s - r = \pm(2s' - r')$, co uwzględniając $r = r'$ daje albo $2s - r = 2s' - r$, czyli $s = s'$, albo $2s - r = -(2s' - r)$, czyli $s' = r - s$, co dowodzi (3) odnośnie hiperpowierzchni typu afinicznego (r2) lub (r3).
- Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy równania $F = 0, G = 0$ opisujące X są postaci (r1), to znaczy

  $$F = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0, \quad G = y_1^2 + \ldots + y_t^2 - x_{t+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 1 = 0.$$

  Skoro H powstaje z F przez podstawienie (7) i równocześnie $H = cG = cy_1^2 + \ldots + cy_t^2 - xy_{t+1}^2 - \ldots - cy_t^2 + c$, to musi być $w_1 = w_2 = \ldots = w_r = 0$ oraz $c = 1$. Stąd w przypadku (r1) dostajemy s = t, koniec.

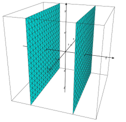
Klasyfikacja właściwych hiperpowierzchni (krzywych) stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$ jest afinicznie izomorficzna z jedną z następujących krzywych opisanych (w standardowym układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$) równaniami:

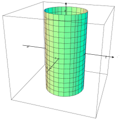
- $-x_1^2 + 1 = 0$.
  Jest to para prostych równoległych.
- $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tego typu afinicznego nazywamy **elipsą**.
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$.
  Krzywą tę nazywamy **hiperbolą**.
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$.
  Jest to para prostych przecinających się.
- $x_1^2 + x_2 = 0$.
  Krzywą tę nazywamy **parabolą**.

Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

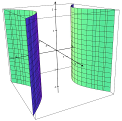
$-x_1^2 + 1 = 0$ para płaszczyzn równoległych



$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ **walec eliptyczny**

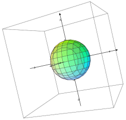


$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ **walcec hiperboliczny**

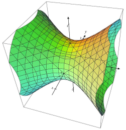


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

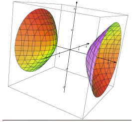
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ elipsoida



$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloida jednopowłokowa**

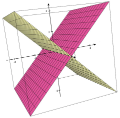


$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ **hiperboloidą dwupowłokową**

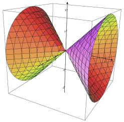


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

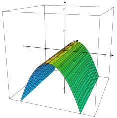
$x_1^2 - x_2^2 = 0$ para płaszczyzn przecinających się



$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ **stożek eliptyczny**

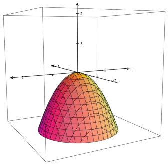


$x_1^2 + x_3 = 0$ **walcem paraboliczny**

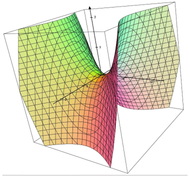


Każda właściwa hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^3$ jest afinicznie równoważna z jedną z następujących krzywych opisanych równaniami:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida eliptyczna**



$x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0$ **paraboloida hiperboliczna**

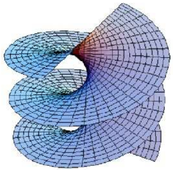


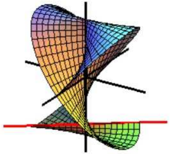
Definicja

Podzbiór X w przestrzeni afinicznej H nazwiemy **prostokreślnym**, jeśli każdy jego punkt leży na pewnej prostej, całkowicie w nim zawartej.

Przykłady.

- Zbiór rozwiązań równania $x_1^2 - x_2^2 = 0$ jest prostokreślny (to ‘dwie proste).
- Stożek oraz walec eliptyczny są prostokreślne w $\mathbb{R}^3$, ale też *helikoida* i *konoida* (a cóż to takiego?)





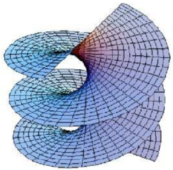
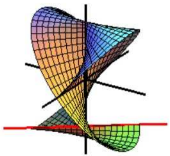
- Przestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$ jest oczywiście zbiorem prostokreślnym (który można traktować jako zbiór algebraiczny spełniający równanie $x_{n+1} = 0$ w $\mathbb{R}^{n+1}$).

Definicja

Podzbiór X w przestrzeni afinicznej H nazwiemy **prostokreślnym**, jeśli każdy jego punkt leży na pewnej prostej, całkowicie w nim zawartej.

Przykłady.

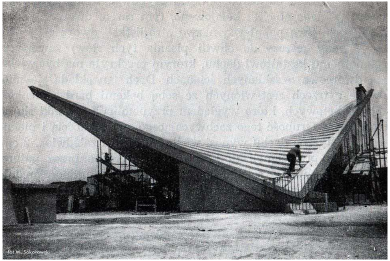
- Zbiór rozwiązań równania $x_1^2 - x_2^2 = 0$ jest prostokreślny (to ‘dwie proste).
- Stożek oraz walec eliptyczny są prostokreślne w $\mathbb{R}^3$, ale też *helikoida* i *konoida* (a cóż to takiego?)

- Przestrzeń afiniczna $\mathbb{R}^n$ jest oczywiście zbiorem prostokreślnym (który można traktować jako zbiór algebraiczny spełniający równanie $x_{n+1} = 0$ w $\mathbb{R}^{n+1}$).

Twierdzenie

Gdy X jest paraboloidą hiperboliczną lub hiperboloidą jednopowłokową, to przez każdy punkt $p \in X$ przechodzą co najmniej dwie różne proste zawarte w X.



Twierdzenie

Każdy zbiór podwójnie prostokreślny w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ jest albo płaszczyzną, albo hiperboloidą jednopowłokową, albo paraboloidą hiperboliczną.