Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 23, 27.05.2021 r.

Definicja

Wielomianem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ **o współczynnikach z ciała** K nazywamy wyrażenie postaci:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

gdzie $i_1, \ldots, i_n$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi (suma ta brana jest po wszystkich możliwych układach liczb całkowi tych nieujemnych), elementy $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in K$, przy czym zakładamy, że suma ta jest skończona.

Zbiór wszystkich wielomianów zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w ciele K oznaczamy $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Stopniem wielomianu $\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$ nazywamy największą z liczb $i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, dla których $a_{i_1\ldots i_n} \neq 0$. Stopień wielomianu f oznaczamy $\deg f$. Jeśli f jest **wielomianem zerowym** – to znaczy $a_{i_1\ldots i_n} = 0$, dla wszystkich $i_1, \ldots, i_n$, to piszemy $\deg f = -\infty$.

Uwaga-definicja

Zbiór $K[x_1, \ldots, x_n]$ jest przestrzenią liniową. Jedną z baz tej przestrzeni liniowej jest zbiór elementów postaci:

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s},$$

gdzie $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_s$ oraz $s \geq 1$, zwanych **jednomianami** zmiennych $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$.

Określamy sumę i iloczyn elementów bazowych:

- suma jednomianów: $x_{i_1} \ldots x_{i_s} + x_{j_1} \ldots x_{j_r}$,
- iloczyn jednomianów: $x_{i_1} \ldots x_{i_s} \cdot x_{j_1} \ldots x_{j_r}$ to

  $$x_{i_1} \ldots x_{i_s} \cdot x_{j_1} \ldots x_{j_r} = x_{k_1} \ldots x_{k_t},$$

  gdzie $\{k_1, \ldots, k_t\} = \{i_1, \ldots, i_s\} \cup \{j_1, \ldots, j_r\}$ oraz $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_t$.

Dla elementów $w = a_1 w_1 + \ldots + a_p w_p$, $v = b_1 v_1 + \ldots + b_q v_q$, gdzie $a_i, b_i \in K$ oraz gdzie w_i, v_j są jednomianami określamy $wv = a_1 b_1 w_1 v_1 + \ldots + a_p b_q w_p v_q$.

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x, y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x, y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x, y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x, y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x, y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x, y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x, y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x, y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x, y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?
- Możemy spróbować przeprowadzić bazę $K[x] \times K[y]$ złożoną z $\{(x^i, y^j)\}$ na bazę $\{x^i y^j\}$ w $K[x, y]$. Możemy przypisać $(x^i, y^j) \mapsto x^i y^j$ ale jak rozwiązać $(w(x), v(y)) \mapsto 2xy$? Można to zrobić na wiele równoważnych sposobów.

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x,y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x,y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x,y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?
- Możemy spróbować przeprowadzić bazę $K[x] \times K[y]$ złożoną z $\{(x^i, y^j)\}$ na bazę $\{x^i y^j\}$ w $K[x,y]$. Możemy przypisać $(x^i, y^j) \mapsto x^i y^j$ ale jak rozwiązać $(w(x), v(y)) \mapsto 2xy$? Można to zrobić na wiele równoważnych sposobów.
- Czy Φ może być liniowe? Wtedy $(x,y) + (1,1) = (x+1, y+1) \mapsto xy + 1$.

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x, y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x, y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x, y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?
- Możemy spróbować przeprowadzić bazę $K[x] \times K[y]$ złożoną z $\{(x^i, y^j)\}$ na bazę $\{x^i y^j\}$ w $K[x, y]$. Możemy przypisać $(x^i, y^j) \mapsto x^i y^j$ ale jak rozwiązać $(w(x), v(y)) \mapsto 2xy$? Można to zrobić na wiele równoważnych sposobów.
- Czy Φ może być liniowe? Wtedy $(x, y) + (1, 1) = (x + 1, y + 1) \mapsto xy + 1$.
- To niedobrze, bo $(x + 1, y + 1) = (x, y) + (1, 0) + (0, 1)$, a przecież przypisujemy elementom bazowym elementy bazowe, czyli $(1, 0) \mapsto 0$ oraz $(0, 1) \mapsto 0$. Czyli $(x, y) \mapsto xy + 1$!? To jakiś absurd, bo teraz $(1, 1) \mapsto 0$.

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x,y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x,y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x,y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?
- Możemy spróbować przeprowadzić bazę $K[x] \times K[y]$ złożoną z $\{(x^i, y^j)\}$ na bazę $\{x^i y^j\}$ w $K[x,y]$. Możemy przypisać $(x^i, y^j) \mapsto x^i y^j$ ale jak rozwiązać $(w(x), v(y)) \mapsto 2xy$? Można to zrobić na wiele równoważnych sposobów.
- Czy Φ może być **dwu**liniowe, czyli liniowe na każdej zmiennej? Teraz $\Phi(x+1, y+1) = \Phi(x,y) + \Phi(1,y) + \Phi(x,1) + \Phi(1,1) = xy + x + y + 1.$

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x,y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Oczywiście $K[x]$ oraz $K[y]$ są podprzestrzeniami *w* $K[x,y]$, ale nie jest to suma prosta (mamy $K \subseteq K[x] \cap K[y]$ oraz $xy \notin K[x] + K[y]$). Więc co to jest?
- A może inaczej: bierzemy zbiór par wielomianów $(f(x), g(y))$, czyli przestrzeń liniową $K[x] \times K[y]$ i chcemy przypisać każdej parze $(w(x), v(y))$ wielomian $\Phi(w(x), v(y))$ z $K[x,y]$. Jakie naturalne warunki spełnia Φ?
- Możemy spróbować przeprowadzić bazę $K[x] \times K[y]$ złożoną z $\{(x^i, y^j)\}$ na bazę $\{x^i y^j\}$ w $K[x,y]$. Możemy przypisać $(x^i, y^j) \mapsto x^i y^j$ ale jak rozwiązać $(w(x), v(y)) \mapsto 2xy$? Można to zrobić na wiele równoważnych sposobów.
- Czy Φ może być **dwu**liniowe, czyli liniowe na każdej zmiennej? Teraz $\Phi(x+1, y+1) = \Phi(x,y) + \Phi(1,y) + \Phi(x,1) + \Phi(1,1) = xy + x + y + 1$.
- A jak dostać $xy + 1$? Nie dostanie się :) To jest $\Phi(x,y) + \Phi(1,1)$. Czy to w ogóle ma jakiś sens? Owszem, zostańmy przy tym dwuliniowym Φ.

Ważne pytanie. Czy jest jakaś relacja pomiędzy przestrzeniami liniowymi:

$$K[x,y], \quad K[x], \quad K[y]?$$

- Okazuje się, że $\Phi : K[x] \times K[y] \to K[x,y]$ ma tzw. **własność uniwersalną**! Dla każdego przekształcenia **dwuliniowego** $\Psi : K[x] \times K[y] \to V$ istnieje przekształcenie **liniowe** (na ćwiczenia!) $f : K[x,y] \to V$ zadane wzorem

$$K[x,y] \ni \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Phi(x^{k_i}, y^{s_j}) \xrightarrow{f} \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \Psi(x^{k_i}, y^{s_j}) \in V.$$

  i jest to **jedyne** przekształcenie liniowe takie, że przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} K[x] \times K[y] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & K[x,y] \arrow[d, dashed, "f"] \\ & V \end{tikzcd}$$

- W języku algebry wieloliniowej oznacza to, że $K[x,y]$ jest $\simeq$ z **iloczynem tensorowym** przestrzeni $K[x]$ oraz $K[y]$ nad cialem K, ozn. $K[x] \otimes_K K[y]$.

Definicja

Funkcją wielomianową na przestrzeni K^n, zadaną wielomianem $\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ należącym do $K[x_1,\ldots,x_n]$ nazywamy funkcję $f : K^n \to K$ taką, że dla każdych $s_1,\ldots,s_n \in K$ zachodzi

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}.$$

Definicja

Funkcją wielomianową na przestrzeni K^n, zadaną wielomianem $\sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ należącym do $K[x_1,\dots,x_n]$ nazywamy funkcję $f : K^n \to K$ taką, że dla każdych $s_1,\dots,s_n \in K$ zachodzi

$$f(s_1,\dots,s_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n}.$$

Twierdzenie

Dla każdego ciała nieskończonego K przyporządkowanie przypisujące każdemu wielomianowi zadaną przez niego funkcję wielomianową jest bijekcją.

Nie działa to dla ciał skończonych. Np. wielomiany $x+1$, x^3+1, $2x^3+2x+1$ w $\mathbb{Z}_3[x]$ wyznaczają tę samą funkcję wielomianową $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, mianowicie $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ (czyli zbiór par $\{(0,1),(1,2),(2,0)\} \subset \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$).

Dowód. Nie ma funkcji wielomianowej, która nie była by zadana przez wielomian. Jeżeli wielomiany $F_1, F_2 \in K[x_1, \dots, x_n]$ zadają tę samą funkcję wielomianową, to wielomian

$$F = F_1 - F_2$$

zadaje funkcję zerową. Wykażemy, że jedynym wielomianem, który zadaje funkcję zerową jest wielomian zerowy. Dowód to indukcja ze względu na n. Niech $n = 1$.

Dowód. Nie ma funkcji wielomianowej, która nie była by zadana przez wielomian. Jeżeli wielomiany $F_1, F_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zadają tę samą funkcję wielomianową, to wielomian

$$F = F_1 - F_2$$

zadaje funkcję zerową. Wykażemy, że jedynym wielomianem, który zadaje funkcję zerową jest wielomian zerowy. Dowód to indukcja ze względu na n. Niech $n = 1$.

- Z twierdzenia o dzieleniu z resztą element $b \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $F \in K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x) = (x - b) \cdot G(x)$, dla pewnego $G \in K[x]$.

Dowód. Nie ma funkcji wielomianowej, która nie była by zadana przez wielomian. Jeżeli wielomiany $F_1, F_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ zadają tę samą funkcję wielomianową, to wielomian

$$F = F_1 - F_2$$

zadaje funkcję zerową. Wykażemy, że jedynym wielomianem, który zadaje funkcję zerową jest wielomian zerowy. Dowód to indukcja ze względu na n. Niech $n = 1$.

- Z twierdzenia o dzieleniu z resztą element $b \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $F \in K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x) = (x - b) \cdot G(x)$, dla pewnego $G \in K[x]$.
- Stąd, jak wiemy, każdy niezerowy wielomian $F \in K[x]$ ma skończenie wiele pierwiastków.

Dowód. Nie ma funkcji wielomianowej, która nie była by zadana przez wielomian. Jeżeli wielomiany $F_1, F_2 \in K[x_1, \dots, x_n]$ zadają tę samą funkcję wielomianową, to wielomian

$$F = F_1 - F_2$$

zadaje funkcję zerową. Wykażemy, że jedynym wielomianem, który zadaje funkcję zerową jest wielomian zerowy. Dowód to indukcja ze względu na n. Niech $n = 1$.

- Z twierdzenia o dzieleniu z resztą element $b \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $F \in K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(x) = (x - b) \cdot G(x)$, dla pewnego $G \in K[x]$.
- Stąd, jak wiemy, każdy niezerowy wielomian $F \in K[x]$ ma skończenie wiele pierwiastków.
- Jeśli więc K jest ciałem nieskończonym i wielomian F zadaje zerową funkcję wielomianową, to każdy element K jest pierwiastkiem F, czyli F jest zerowy,

Dowód cd. Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że wielomian n zmiennych

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

zadaje zerową funkcję wielomianową.

Dowód cd. Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że wielomian n zmiennych

$$F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

zadaje zerową funkcję wielomianową.

- Ustalmy $s_2, \ldots, s_n$ i rozpatrzmy wielomian $\overline{F} \in K[x]$ zadany wzorem

$$\overline{F} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}$$

$$= \sum_{i_2,\ldots,i_n} a_{0\,i_2\ldots i_n} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n} x^0 + \sum_{i_2,\ldots,i_n} a_{1\,i_2\ldots i_n} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n} x^1 + \ldots$$

Dowód cd. Krok indukcyjny. Przypuśćmy, że wielomian n zmiennych

$$F = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \in K[x_1, \dots, x_n]$$

zadaje zerową funkcję wielomianową.

- Ustalmy $s_2, \dots, s_n$ i rozpatrzmy wielomian $\overline{F} \in K[x]$ zadany wzorem

$$\overline{F} = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n}$$
$$= \sum_{i_2,\dots,i_n} a_{0\,i_2\dots i_n} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n} x^0 + \sum_{i_2,\dots,i_n} a_{1\,i_2\dots i_n} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n} x^1 + \dots$$

- Skoro funkcja wielomianowa zadana wielomianem F jest zerowa, to również funkcja wielomianowa zadana wielomianem $\overline{F}$ jest zerowa. Jest tak dla każdych $s_2, \dots, s_n$, stąd funkcje wielomianowe $n-1$ zmiennych zadane wielomianami $\sum_{i_2,\dots,i_n} a_{ji_2\dots i_n} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \in K[x_2, \dots, x_n]$ są zerowe, czyli ich współczynniki $a_{ji_2\dots i_n}$ są zerowe. Wykazaliśmy zatem, że F jest zerowy.

Od tej pory zakładamy, że rozpatrywane ciała są nieskończone i charakterystyki $\neq 2$.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem K i niech $p_0, \mathcal{A}$ bedzie układem bazowym przestrzeni H, przy czym $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Funkcję $f : H \to K$ nazywamy **funkcją wielomianową na przestrzeni** H, jeśli istnieje wielomian $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ należący do zbioru $K[x_1, \ldots, x_n]$ taki, że dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$ zachodzi:

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1 \ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}.$$

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad ciałem K i niech $p_0, \mathcal{A}$ będzie układem bazowym przestrzeni H, przy czym $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Funkcję $f : H \to K$ nazywamy **funkcją wielomianową na przestrzeni** H, jeśli istnieje wielomian $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ należący do zbioru $K[x_1, \ldots, x_n]$ taki, że dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$ zachodzi:

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n}.$$

Uwaga

Dla funkcji $f : H \to K$ z przestrzeni afinicznej H do ciała K oraz dowolnych układów bazowych $p_0; \mathcal{A}$, $q_0; \mathcal{B}$ fakt bycia przez f funkcją wielomianową w $p_0; \mathcal{A}$ jest równoważny temu, że f jest wielomianowa w $q_0; \mathcal{B}$.

Dowód. Niech $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

- Przypuśćmy, że w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, czyli $p_0; \mathcal{A}$, mamy

$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n},$$

  dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$.

Dowód. Niech $F = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

- Przypuśćmy, że w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, czyli $p_0; \mathcal{A}$, mamy
$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_n^{i_n},$$
dla każdych $s_1, \ldots, s_n \in K$.

- Dla układu bazowego $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$, czyli $q_0; \mathcal{B}$ niech wielomian
$$G = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_n^{i_n}$$
będzie wielomianem powstałym z F przez podstawienie:
$$x_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n + w_i,$$
gdzie $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(K)$, $w_i \in K$, oraz $q_0 = p_0 + \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$.

Dowód. Niech $F = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \in K[x_1, \dots, x_n]$.

- Przypuśćmy, że w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$, czyli $p_0; \mathcal{A}$, mamy
$$f(p_0 + s_1\alpha_1 + \dots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n},$$
dla każdych $s_1, \dots, s_n \in K$.

- Dla układu bazowego $q_0; \beta_1, \dots, \beta_n$, czyli $q_0; \mathcal{B}$ niech wielomian
$$G = \sum_{i_1,\dots,i_n} b_{i_1\dots i_n} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_n^{i_n}$$
będzie wielomianem powstałym z F przez podstawienie:
$$x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \dots + c_{in}y_n + w_i,$$
gdzie $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = [c_{ij}] \in M_{n\times n}(K)$, $w_i \in K$, oraz $q_0 = p_0 + \sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$.

- Wówczas $f(q_0 + t_1\beta_1 + \dots + t_n\beta_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} b_{i_1\dots i_n} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}$, dla każdych $t_1, \dots, t_n \in K$. Przy tym $\deg F = \deg G$.

Istotnie, skoro $x_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \ldots + c_{in}y_n + w_i$ oraz $q_0 = p_0 + \sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$, to

$$
\begin{aligned}
f(q_0 + \sum_i t_i\beta_i) &= f(q_0 + t_1(c_{11}\alpha_1 + \ldots + c_{n1}\alpha_n) + \ldots + t_1(c_{1n}\alpha_1 + \ldots + c_{nn}\alpha_n)) = \\
&= f(p_0 + \sum_{i=1}^n w_i\alpha_i + t_1(\sum_{i=1}^n c_{i1}\alpha_i) + \ldots + t_n(\sum_{i=1}^n c_{in}\alpha_i) = \\
&= f(p_0 + (w_1 + t_1c_{11} + \ldots + t_nc_{1n})\alpha_1 + \ldots (w_n + t_1c_{n1} + \ldots + t_nc_{nn})\alpha_n) = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n}(w_1 + t_1c_{11} + \ldots + t_nc_{1n})^{i_1} \ldots (w_n + t_1c_{n1} + \ldots + t_nc_{nn})^{i_n} = \\
&= F(w_1 + t_1c_{11} + \ldots + t_nc_{1n}, \ldots, w_n + t_1c_{n1} + \ldots + t_nc_{nn}) = \\
&= G(t_1, \ldots, t_n) = \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}
\end{aligned}
$$

Przykład. Funkcja $f : K^3 \to K$ postaci $f(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2$ jest wielomianowa, ponieważ

- dla układu bazowego $(0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ oraz wielomianu
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2,$$
- dla układu bazowego $(0, 0, 0); (1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$ oraz wielomianu
$$G(y_1, y_2, y_3) = y_2,$$

  bo

  $(t_1, t_2, t_3) = (0, 0, 0) + (-t_2)(1, -1, 0) + (t_1 + t_2)(1, 0, 1) + (t_3 - t_1 - t_2)(0, 0, 1).$

Przykład. Funkcja $f : K^3 \to K$ postaci $f(t_1, t_2, t_3) = t_1 + t_2$ jest wielomianowa, ponieważ

- dla układu bazowego $(0,0,0); (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ oraz wielomianu
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2,$$
- dla układu bazowego $(0,0,0); (1,-1,0), (1,0,1), (0,0,1)$ oraz wielomianu
$$G(y_1, y_2, y_3) = y_2,$$
bo $(t_1, t_2, t_3) = (0,0,0) - t_2(1,-1,0) + (t_1 + t_2)(1,0,1) + (t_3 - t_1 - t_2)(0,0,1)$.

Definicja

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Mówimy, że **wielomian** $F = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \in K[x_1, \dots, x_n]$ **odpowiada funkcji** f w układzie bazowym $p_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$, jeśli $f(p_0 + s_1\alpha_1 + \dots + s_n\alpha_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1\dots i_n} s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_n^{i_n}$, dla każdych $s_1, \dots, s_n \in K$. Liczbę $\deg F$ nazywamy **stopniem funkcji wielomianowej** f.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **algebraicznym**, jeśli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, \ldots, f_k$ na przestrzeni H takie, że:

$$X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}.$$

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **algebraicznym**, jeśli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, \ldots, f_k$ na przestrzeni H takie, że:

$$X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}.$$

- Jeżeli w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ funkcjom $f_1, \ldots, f_k$ odpowiadają wielomiany $F_1, \ldots, F_k$, to mówimy, że w tym układzie bazowym X jest **opisywany wielomianami** $F_1, \ldots, F_k$, albo **opisywany układem równań** $F_1 = 0, \ldots, F_k = 0$.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad K.

- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **algebraicznym**, jeśli istnieją funkcje wielomianowe $f_1, \dots, f_k$ na przestrzeni H takie, że:
$$X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \dots, f_k(p) = 0\}.$$
- Jeżeli w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ funkcjom $f_1, \dots, f_k$ odpowiadają wielomiany $F_1, \dots, F_k$, to mówimy, że w tym układzie bazowym X jest **opisywany wielomianami** $F_1, \dots, F_k$, albo **opisywany układem równań** $F_1 = 0, \dots, F_k = 0$.
- Podzbiór $X \subset H$ nazywamy **hiperpowierzchnią**, jeśli istnieje funkcja wielomianowa f na H taka, że $X = \{p \in H \mid f(p) = 0\}$. Mówimy wtedy, że **hiperpowierzchnia X jest opisywana przez funkcję f. Stopniem hiperpowierzchni** X nazywamy najniższy ze stopni wielomianów opisujących X.

Przykłady.

- Rozważmy zbiór takich $p = (0,0) + x_1(1,0) + x_2(0,1)$, których współrzędne x_1, x_2 spełniają równość
$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$
Biorąc wielomian $F \in K[x_1, x_2]$ postaci $x_1^2 + x_2^2 - 1$ oraz funkcję wielomianową na $\mathbb{R}^2$ odpowiadającą w układzie bazowym $(0,0); (1,0), (0,1)$ wielomianowi F, dostajemy $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, czyli zbiór punktów $p \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $f(p) = 0$ jest hiperpowierzchnią stopnia 2.

Przykłady.

- Rozważmy zbiór takich $p = (0,0) + x_1(1,0) + x_2(0,1)$, których współrzędne x_1, x_2 spełniają równość
$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$
Biorąc wielomian $F \in K[x_1, x_2]$ postaci $x_1^2 + x_2^2 - 1$ oraz funkcję wielomianową na $\mathbb{R}^2$ odpowiadającą w układzie bazowym $(0,0); (1,0), (0,1)$ wielomianowi F, dostajemy $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, czyli zbiór punktów $p \in \mathbb{R}^2$ spełniających warunek $f(p) = 0$ jest hiperpowierzchnią stopnia 2.

- Jeśli weźmiemy układ bazowy $(2,1); (1,0), (1,1)$, to połóżmy
$$p_0 = (0,0), \alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1), q_0 = (2,1), \beta_1 = (1,0), \beta_2 = (1,-1).$$
Wówczas stosując notację wyżej mamy
$w_1 = 2, w_2 = 1, c_{11} = 1, c_{12} = 1, c_{21} = 0, c_{22} = -1$, czyli dokonując podstawienia $x_1 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 2, \quad x_2 = 0 \cdot y_1 + -1 \cdot y_2 + 1$, dostajemy
$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_2^2 + 2y_1 + 4.$$

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Dowód. Rozpatrzmy zbiór $X = \{p \in H \mid f_1(p) = 0, \ldots, f_k(p) = 0\}$, gdzie $f_i : H \to \mathbb{R}$ są funkcjami wielomianowymi na rzeczywistej przestrzeni afinicznej H, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas

$$f = f_1^2 + \ldots + f_k^2$$

jest funkcją wielomianową na H i $X = \{p \in H \mid f(p) = 0\}$

Przykłady.

- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ jest sferą. Jest to hiperpowierzchnia stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
- Zbiór $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1, x_3 = 0\}$ jest okręgiem. Jest to zbiór algebraiczny w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga

Każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad ciałem $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Definicja

Mówimy, że hiperpowierzchnie H_1, H_2 w przestrzeni afinicznej H są **afinicznie izomorficzne** (inaczej mówiąc: mają **ten sam typ afiniczny**), jeśli istnieje izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ taki, że $h(H_1) = H_2$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Dowód.

- Przypuśćmy, że X_1, X_2 są w H afinicznie izomorficzne. Jeśli X_1 jest w układzie $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ opisywana równaniem $F = 0$ i $h(X_1) = X_2$, to X_2 jest również w układzie bazowym $h(p_0); h'(\alpha_1), \ldots, h'(\alpha_n)$ opisywana równaniem $F = 0$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie X_1, X_2 w H są afinicznie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją układy bazowe $p_0; \mathcal{A}$ oraz $q_0; \mathcal{B}$ takie, że X_1 jest w układzie $p_0; \mathcal{A}$ opisana takim samym równaniem, jak X_2 w układzie $q_0; \mathcal{B}$.

Dowód.

- Przypuśćmy, że X_1, X_2 są w H afinicznie izomorficzne. Jeśli X_1 jest w układzie $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ opisywana równaniem $F = 0$ i $h(X_1) = X_2$, to X_2 jest również w układzie bazowym $h(p_0); h'(\alpha_1), \ldots, h'(\alpha_n)$ opisywana równaniem $F = 0$.
- Na odwrót: przypuśćmy, że X_1 w układzie $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oraz X_2 w układzie $q_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$ są opisane równaniem $F = 0$. Wówczas izomorfizm afiniczny $h : H \to H$ zadany warunkami $h(p_0) = q_0$ oraz $h'(\alpha_i) = \beta_i$, dla $i = 1, \ldots, n$, spełnia $h(X_1) = X_2$.

Uwaga

Hiperpowierzchnie stopnia 1 w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej H to $n-1$-wymiarowe podprzestrzenie afiniczne przestrzeni H. Takie podprzestrzenie nazywamy **hiperpłaszczyznami**.

Uwaga

Hiperpowierzchnie stopnia 1 w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej H to $n-1$-wymiarowe podprzestrzenie afiniczne przestrzeni H. Takie podprzestrzenie nazywamy **hiperpłaszczyznami**.

Dowód.

- Jeśli $X \subset H$ jest hiperpowierzchnią stopnia 1, to dla pewnego układu bazowego $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mamy (z definicji)

$$X = \{p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \in H \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0\},$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. A zatem H jest hiperpłaszczyzną.

Uwaga

Hiperpowierzchnie stopnia 1 w n-wymiarowej przestrzeni afinicznej H to $n-1$-wymiarowe podprzestrzenie afiniczne przestrzeni H. Takie podprzestrzenie nazywamy **hiperpłaszczyznami**.

Dowód.

- Jeśli $X \subset H$ jest hiperpowierzchnią stopnia 1, to dla pewnego układu bazowego $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mamy (z definicji)
$$X = \{p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \in H \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0\},$$
dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. A zatem H jest hiperpłaszczyzną.

- Na odwrót: niech $X \subset H$ będzie podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$ i niech $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie układem bazowym przestrzeni H. Wówczas zbiór $\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n\}$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru $n-1$ w K^n, opisywalnym równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$.

Twierdzenie - cel na kolejny wykład

Niech $f : H \to K$ będzie funkcją wielomianową stopnia 2 określoną na n wymiarowej przestrzeni afinicznej H. Wówczas istnieje taki układ bazowy w H, w którym funkcji f odpowiada wielomian postaci:

$$
\begin{array}{lllll}
 & (i) \quad a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c & \textit{gdzie} \quad r = r(f) & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
\textit{lub} & & & \\
 & (ii) \quad a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n & \textit{gdzie} \quad r = r(f) < n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Wniosek

Dla każdej hiperpowierzchni X stopnia 2 w n wymiarowej przestrzeni afinicznej istnieje układ bazowy, w którym X jest opisana jednym z równań postaci:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + c = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0 \\
(b) & a_1x_1^2 + \ldots + a_rx_r^2 + x_n = 0 & \textit{gdzie} \quad 1 \leq r \leq n-1 & \textit{oraz} \quad a_1, \ldots, a_r \neq 0.
\end{array}
$$

Uwaga

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz symetryczną $A \in M_{n \times n}(K)$, macierz $B \in M_{1 \times n}(K)$ oraz element $c \in K$ tak, że biorąc $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T A x + B x + c.$$

Dla przykładu, mamy (pamiętajmy: $x_2 \cdot x_1 = x_1 x_2$):

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 + 6 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 6.$$

Uwaga

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \dots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz symetryczną $A \in M_{n \times n}(K)$, macierz $B \in M_{1 \times n}(K)$ oraz element $c \in K$ tak, że biorąc $x = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T A x + Bx + c.$$

Dowód. Weźmy wielomian $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ stopnia 2 i niech $F = F_2 + F_1 + F_0$, gdzie $F_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ oraz F_i jest sumą jednomianów stopnia i, dla $i = 0, 1, 2$.

Uwaga

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz symetryczną $A \in M_{n \times n}(K)$, macierz $B \in M_{1 \times n}(K)$ oraz element $c \in K$ tak, że biorąc $x = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T A x + Bx + c.$$

Dowód. Weźmy wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ stopnia 2 i niech $F = F_2 + F_1 + F_0$, gdzie $F_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ oraz F_i jest sumą jednomianów stopnia i, dla $i = 0, 1, 2$.

Załóżmy też, że $f, f_0, f_1, f_2 : K^n \to K$ są funkcjami wielomianowymi odpowiadającymi wielomianom F, F_0, F_1, F_2 w układzie bazowym $(0, 0, \ldots, 0)$; st.

Uwaga

Każdy wielomian F stopnia 2, zmiennych $x_1, \dots, x_n$, o współczynnikach w ciele K jest jednoznacznie wyznaczony przez macierz symetryczną $A \in M_{n\times n}(K)$, macierz $B \in M_{1\times n}(K)$ oraz element $c \in K$ tak, że biorąc $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$, mamy:

$$F = x^T Ax + Bx + c.$$

Dowód. Weźmy wielomian $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ stopnia 2 i niech $F = F_2 + F_1 + F_0$, gdzie $F_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ oraz F_i jest sumą jednomianów stopnia i, dla $i = 0, 1, 2$.

Załóżmy też, że $f, f_0, f_1, f_2 : K^n \to K$ są funkcjami wielomianowymi odpowiadającymi wielomianom F, F_0, F_1, F_2 w układzie bazowym $(0, 0, \dots, 0)$; st.

Wówczas istnieje forma kwadratowa $q : K^n \to K$, przekształcenie liniowe $g : K^n \to K$ oraz funkcja stała $c : K^n \to K$ takie, że $(q + g + c)(t_1, \dots, t_n)$ równe jest

$$f_2(t_1, \dots, t_n) + f_1(t_1, \dots, t_n) + f_0(t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Uwaga - dowód będzie na kolejnym wykładzie

Załóżmy, że funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 odpowiada w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ wielomian $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ postaci:

$$F = x^T Ax + Bx + c,$$

gdzie $x = [x_1 \ldots x_n]^T$. Wówczas w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ funkcji f odpowiada wielomian

$$G = x^T A'x + B'x + c',$$

przy czym $A' = C^T AC$, gdzie $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

Uwaga - dowód będzie na kolejnym wykładzie

Załóżmy, że funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 odpowiada w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ wielomian $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ postaci:

$$F = x^T A x + B x + c,$$

gdzie $x = [x_1 \dots x_n]^T$. Wówczas w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ funkcji f odpowiada wielomian

$$G = x^T A' x + B' x + c',$$

przy czym $A' = C^T A C$, gdzie $C = M(\mathrm{id})^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

Wniosek

Macierze części kwadratowych wielomianów odpowiadających (w zadanych układach bazowych) tej samej funkcji wielomianowej $f : H \to K$ stopnia 2 są kongruentne. W szczególności mają ten sam rząd.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana będzie w układzie bazowym $(0,0);(1,0),(0,1)$ wielomianem

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 + 6 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 6.$$

Weźmy układ bazowy $q_0 = (1,2); \beta_1 = (-2,5), \beta_2 = (1,1)$. Wówczas kładąc $p_0 = (0,0)$, $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1)$, $\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$, $\mathcal{B} = ((-2,5),(1,1))$ mamy:

$$C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A zatem postać wielomianu G opisującego funkcję wielomianową f w układzie bazowym $q_0; \mathcal{B}$ uzyskujemy przez zamianę zmiennych

$$x_1 = -2y_1 + x_2 + 1, x_2 = 5y_1 + y_2 + 2$$

w wielomianie F. Część kwadratowa wielomianu G opisana jest macierzą:

$$A' = C^T A C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 26 \\ 26 & 15 \end{bmatrix}.$$