Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 22, 25.05.2021 r.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.
- Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru $m+1$, to zbiór $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ nazywamy **podprzestrzenią rzutową** wymiaru m w $\mathbb{P}(V)$. Dla $m = n-1$ mówimy o hiperpłaszczyźnie rzutowej. Z definicji $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$.

Definicja

Niech V będzie $n+1$-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

- **Przestrzenią rzutową** $\mathbb{P}(V)$ wyznaczoną przez V nazywamy zbiór wszystkich podprzestrzeni wymiaru 1 w V.
- Jeśli $V = K^{n+1}$, to piszemy $\mathbb{P}^n = K\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(K^{n+1})$ i zbiór ten nazywamy n-**wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem** K.
- Jeśli $U \subseteq V$ jest podprzestrzenią liniową wymiaru $m+1$, to zbiór $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}(V)$ nazywamy **podprzestrzenią rzutową** wymiaru m w $\mathbb{P}(V)$. Dla $m = n-1$ mówimy o hiperpłaszczyźnie rzutowej. Z definicji $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$.

Inaczej: $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją równoważności na $V \setminus \{0\}$ postaci:

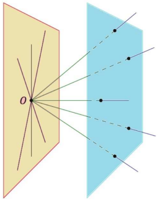
$$v \sim w \iff \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 : v = \lambda w.$$

Klasę $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$ w relacji $\sim$ nazywamy **punktem** w przestrzeni $K\mathbb{P}^n$ o (standardowych) **współrzędnych jednorodnych** $x_0, \ldots, x_n$, ozn. $(x_0 : \ldots : x_n)$.

Dwa intuicyjne modele. Model 1 w przestrzeni afinicznej K^{n+1}. Niech

$$E = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^n \,|\, x_0 = 1\}$$

Każda prosta nie zawarta w $T(E)$ przecina E w dokładnie jednym punkcie.
To daje utożsamienie $\mathbb{P}(K^{n+1}) \setminus \mathbb{P}(K^n)$ z E.



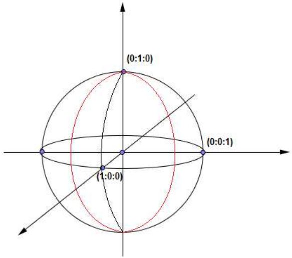
Rysunek zaadoptowany z *Algebra I, Textbook for Students of Mathematics*, A. L. Gorodentsev.

Rys. 1. Model płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$, w którym każdy punkt płaszczyzny $x_0 = 1$ to jeden z **punktów właściwych** odpowiadający pewnej prostej $\mathrm{lin}(a, b, c)$, $a \neq 0$. Proste $\mathrm{lin}(0, b, c)$ odpowiadają w tym modelu **punktom niewłaściwym.**
Za chwilę model ten zinterpretujemy jako jedną z map afinicznych przestrzeni $\mathbb{RP}^2$.

Dwa intuicyjne modele. Model 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

będzie n-wymiarową sferą. Na $\mathbb{S}^n$ wprowadzamy relację równoważności $x \sim y \iff x = -y$. Jest jasne, że istnieje bijekcja między $\mathbb{RP}^n$ oraz $\mathbb{S}^n / \sim$.



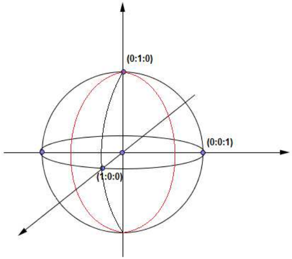
Rysunek zaadoptowany z *Imagining the projective Space*, `https://math.stackexchange.com/`.

Rys. 2. Model płaszczyzny rzutowej $\mathbb{RP}^2$ na $\mathbb{S}^2$, w którym każdej parze punktów antypodycznych na sferze odpowiada jednoznacznie element $\mathbb{RP}^2$. W modelu tym nie ma rozróżnienia punktów właściwych i niewłaściwych. Czym są *proste* w $\mathbb{RP}^2$?

Dwa intuicyjne modele. Model 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

będzie n-wymiarową sferą. Na $\mathbb{S}^n$ wprowadzamy relację równoważności $x \sim y \iff x = -y$. Jest jasne, że istnieje bijekcja między $\mathbb{RP}^n$ oraz $\mathbb{S}^n / \sim$.



Rysunek zaadoptowany z *Imagining the projective Space*, `https://math.stackexchange.com/`.

Inne (ważne w dalszej edukacji) modele:

- M. Donten-Bury, *Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?*, Delta, 6.2011.
- M. Kordos, *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Delta, 5.2013.

Intuicje cd. Każda podprzestrzeń rzutowa jest w (standardowych) współrzędnych jednorodnych opisana przez pewien układ równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{r0}x_0 + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Np. zbiór punktów $K\mathbb{P}^2$, których współrzędne jednorodne $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniają

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in K$ nie wszystkich równych 0 nazywamy **prostą** w $K\mathbb{P}^2$.

Intuicje cd. Każda podprzestrzeń rzutowa jest w (standardowych) współrzędnych jednorodnych opisana przez pewien układ równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = 0 \\ & \vdots \\ a_{r0}x_0 + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n & = 0 \end{cases}.$$

Np. zbiór punktów $K\mathbb{P}^2$, których współrzędne jednorodne $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniają

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

dla pewnych $a_1, a_2, a_3 \in K$ nie wszystkich równych 0 nazywamy **prostą** w $K\mathbb{P}^2$.

Nietrudno pokazać, że:

- Dla każdych dwóch różnych punktów w płaszczyźnie rzutowej istnieje dokładnie jedna prosta, z którą punkty te są incydentne (należą do niej).
- Na płaszczyźnie rzutowej każde dwie różne proste przecinają się w 1 punkcie.

Proszę wyrazić te zdania w języku podprzestrzeni w K^3.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Istotnie, jeśli $\alpha \notin \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\alpha = x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n$, gdzie $x_0 \neq 0$, stąd:

$$\lambda\alpha = \lambda x_0\alpha_0 + \ldots + \lambda x_n\alpha_n = \alpha_0 + \beta,$$

gdzie $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda x_0 = 1$.

Intuicje cd. Rozpatrzmy w przestrzeni liniowej V z bazą $(\alpha_0.\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ warstwę

$$A_0 = \alpha_0 + \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dla każdego wektora $\alpha \in V$, jeśli prosta $l = \mathrm{lin}(\alpha)$ nie jest zawarta w podprzestrzeni $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $l \cap A_0$ jest zbiorem jednopunktowym.

Istotnie, jeśli $\alpha \notin \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to $\alpha = x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n$, gdzie $x_0 \neq 0$, stąd:

$$\lambda\alpha = \lambda x_0\alpha_0 + \ldots + \lambda x_n\alpha_n = \alpha_0 + \beta,$$

gdzie $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda x_0 = 1$.

Każdy punkt wspólny prostej $\mathrm{lin}(x_0\alpha_0 + \ldots + x_n\alpha_n)$, $x_0 \neq 0$ przecina się z A_0 na:

$$\alpha_0 + \frac{x_1}{x_0}\alpha_1 + \ldots + \frac{x_n}{x_0}\alpha_n,$$

Czyli w układzie bazowym $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w A_0 punkt przecięcia ma współrzędne:

$$u_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad \ldots \quad , u_n = \frac{x_n}{x_0}$$

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.
- Jeśli $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ jest bazą V^* to wektory $0 \neq v = (\zeta_0(v), \ldots, \zeta_n(v))$, $0 \neq w = (\zeta_0(w), \ldots, \zeta_n(w))$ wyznaczają ten sam punkt w $p \in \mathbb{P}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne są proporcjonalne. Układ $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ nazywamy **współrzędnymi jednorodnymi** punktu p w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie przestrzenią liniową wymiaru $n+1$ i niech $0 \neq \zeta \in V^*$.

- Hiperpłaszczyznę afiniczną U_ζ złożoną z punktów $x \in V$ spełniających równanie $\zeta(x) = 1$ nazywamy **mapą afiniczną** wyznaczoną przez ζ. Podzbiór $\ker(\zeta)$ nazywamy **hiperpłaszczyzną punktów niewłaściwych** mapy U_ζ.
- Niech $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ będzie bazą V^* dualną do pewnej bazy $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ w V. Wówczas $\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą układ bazowy w U_ζ. Współrzędne punktów w U_ζ nazywamy **lokalnymi współrzędnymi afinicznymi** w U_ζ.
- Jeśli $(\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ jest bazą V^* to wektory $0 \neq v = (\zeta_0(v), \ldots, \zeta_n(v))$, $0 \neq w = (\zeta_0(w), \ldots, \zeta_n(w))$ wyznaczają ten sam punkt w $p \in \mathbb{P}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne są proporcjonalne. Układ $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ nazywamy **współrzędnymi jednorodnymi** punktu p w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$.
- Dla bazy $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ przestrzeni V^* zbiór $n+1$ map afinicznych U_{ζ_i}, dla $0 \leq i \leq n$ nazywamy **atlasem afinicznym** na $\mathbb{P}^n$. Oczywiście $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_{\zeta_i}$.

Uwagi i przykłady.

- Niech $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ będzie bazą V^*. Każdy punkt w $\mathbb{P}^n$ ma przynajmniej jedną niezerową współrzędną jednorodną (w tej bazie), a więc istnieje w atlasie afinicznym mapa U_{ζ_i}, w której jest on punktem właściwym.

Uwagi i przykłady.

- Niech $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ będzie bazą V^*. Każdy punkt w $\mathbb{P}^n$ ma przynajmniej jedną niezerową współrzędną jednorodną (w tej bazie), a więc istnieje w atlasie afinicznym mapa U_{ζ_i}, w której jest on punktem właściwym.
- Mając punkt $p \in \mathbb{P}^n$ o współrzędnych jednorodnych $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$, wyznaczamy współrzędne afiniczne punktu p w U_{ζ_i} biorąc wektor $v = p/\zeta_i(p)$ taki, że $\zeta_i(v) = 1$. Wówczas $p \in U_{\zeta_i}$ (jeśli $\zeta_i(p) = 0$, to $p \notin U_{\zeta_i}$). Szukane współrzędne afiniczne to $\zeta_j(v)$, dla $j \neq i$.

Uwagi i przykłady.

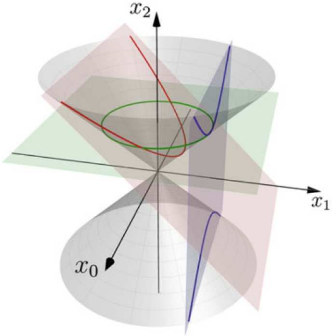
- Niech $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ będzie bazą V^*. Każdy punkt w $\mathbb{P}^n$ ma przynajmniej jedną niezerową współrzędną jednorodną (w tej bazie), a więc istnieje w atlasie afinicznym mapa U_{ζ_i}, w której jest on punktem właściwym.
- Mając punkt $p \in \mathbb{P}^n$ o współrzędnych jednorodnych $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ w bazie $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$, wyznaczamy współrzędne afiniczne punktu p w U_{ζ_i} biorąc wektor $v = p/\zeta_i(p)$ taki, że $\zeta_i(v) = 1$. Wówczas $p \in U_{\zeta_i}$ (jeśli $\zeta_i(p) = 0$, to $p \notin U_{\zeta_i}$). Szukane współrzędne afiniczne to $\zeta_j(v)$, dla $j \neq i$.
- **Przykład.** Prosta afiniczna $\mathbb{P}^1$. Weźmy dwie mapy afiniczne U_{ζ_0}, U_{ζ_1} w K^2 opisane odpowiednio równaniami

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1,$$

czyli $\zeta_i(x_0, x_1) = x_i$ dla $i = 0, 1$. Mamy $U_{\zeta_0} = \mathbb{P}^1 \setminus \{(0 : 1)\}$. Każdy punkt właściwy $(x_0 : x_1)$ dla $x_0 \neq 0$ jest w U_{ζ_0} reprezentowany przez punkt $(1 : x_1/x_0)$. Ma on lokalną współrzędną afiniczną równą $\zeta_1^*(1, x_1/x_0)$ czyli jest to $t = x_1/x_0$. Lokalna współrzędna punktów w U_{ζ_1} to $s = x_0/x_1 = 1/t$.

Kluczowy przykład. Rozważmy podzbiór $\mathbb{RP}^2$ złożony z punktów o współrzędnych jednorodnych $(x_0 : x_1 : x_2)$ spełniających:

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2.$$



Źródło: *Algebra I, Textbook for Students of Mathematics*.

- w mapie standardowej U_{x_1} opisanej równaniem $x_1 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_1}, u_2 = \frac{x_2}{x_1}$ ma równanie hiperboli:

$$u_2^2 - u_0^2 = 1.$$

- w mapie standardowej U_{x_2} opisanej równaniem $x_2 = 1$ we współrzędnych $u_0 = \frac{x_0}{x_2}, u_2 = \frac{x_1}{x_2}$ ma równanie okręgu:

$$u_0^2 + u_1^2 = 1.$$

- w mapie niestandardowej $U_{x_1+x_2}$ opisanej równaniem $x_1 + x_2 = 1$, we współrzędnych: $t = \frac{x_0}{x_1+x_2}, u = \frac{x_2-x_1}{x_2+x_1}$ ma równanie paraboli:

$$t^2 = u.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Zacznijmy od historii...

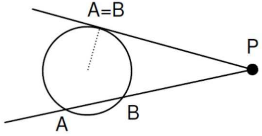
- W 1826 roku J. Steiner zdefiniował potęgę punktu P względem okręgu C:

  $$P * C = d^2 - r^2, \qquad (\diamondsuit)$$

  gdzie r to promień okręgu, a d to odległość P od jego środka. Motywacja jest taka: iloczyn długości

  $$PA \cdot PB$$

  nie zależy od wyboru prostej przechodzącej przez P: Wybierając prostą styczną do okręgu dostajemy wyrażenie $(\diamondsuit)$.



Źródło: J. Kocik, *A theorem on circle configurations*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Zacznijmy od historii...

- W 1866 roku G. Darboux zdefiniował potęgę pary okręgów C_1, C_2, czyli:

  $$C_1 * C_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2,$$

  gdzie r_1, r_2 to promienie okręgów C_1, C_2, a d to odległość pomiędzy ich środkami. Jeśli okręgi się przecinają, wówczas $C_1 * C_2 = r_1 r_2 \cos\theta$, gdzie θ jest kątem pomiędzy okręgami. Jeśli okręgi są rozłączne, wówczas produkt $C_1 * C_2$ równy jest kwadratowi odcinka narysowanego niżej.

Źródło: J. Kocik, *A theorem on circle configurations*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Zacznijmy od historii...

- Zbiór punktów na okręgu o promieniu r i środku (f, g) ma postać:

  $$x^2 + y^2 - 2fx - 2gy + k = 0 \qquad (\spadesuit)$$

  gdzie $k = f^2 + g^2 - r^2$. W roku 1883 H. Cox zapisał produkt Darboux dwóch okręgów o środkach (f_1, g_1), (f_2, g_2) i promieniach r_1, r_2, odpowiednio, w języku współczynników równań $(\spadesuit)$:

  $$C_1 * C_2 = k_1 + k_2 - 2f_1 f_2 - 2g_1 g_2.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Zacznijmy od historii...

- Zbiór punktów na okręgu o promieniu r i środku (f, g) ma postać:
$$x^2 + y^2 - 2fx - 2gy + k = 0 \qquad (\spadesuit)$$
gdzie $k = f^2 + g^2 - r^2$. W roku 1883 H. Cox zapisał produkt Darboux dwóch okręgów o środkach (f_1, g_1), (f_2, g_2) i promieniach r_1, r_2, odpowiednio, w języku współczynników równań $(\spadesuit)$:
$$C_1 * C_2 = k_1 + k_2 - 2f_1 f_2 - 2g_1 g_2.$$
- W 1970 roku D. Pedoe zorientował się, że powyższą równość można interpretować jako... formę dwuliniową $\langle , \rangle$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Pomysł jest *rzutowy* w naturze: równanie $(\spadesuit)$ można przeskalować do równania postaci: $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$ i określić (dla tak opisanych okręgów):
$$\langle C_1, C_2 \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{d_1 a_1 + d_2 a_2}{2}.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

O co tu chodzi? Każdemu okręgowi opisanemu w $\mathbb{R}^2$ równaniem:

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0, \quad a \neq 0.$$

przypisujemy wektor $C(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Każda niezerowa wielokrotność tego wektora reprezentuje ten sam okrąg , a więc możemy ograniczyć się do znormalizowanego równania opisującego C:

$$x^2 + y^2 - 2fx - 2gy + k = 0$$

i związanego z nim wektora współrzędnych $C(1, f, g, k)$. Innymi słowy każdy okrąg utożsamiamy... z punktem przestrzeni $\mathbb{RP}^3$ mającym współrzędne jednorodne

$$(1 : f : g : k)$$

w $\mathbb{R}^4$.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Na $\mathbb{R}^4$ wprowadzamy strukturę przestrzeni dwuliniowej Minkowskiego (o wielkim znaczeniu w fizyce) poprzez zadanie formy dwuliniowej $\langle , \rangle$ danej macierzą:

$$G(\langle , \rangle, st) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i widzimy, że teraz rzeczywiście dla okręgów opisanych równaniami $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$ określić można wektory $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ i wtedy

$$\langle C_1, C_2 \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{d_1 a_2 + d_2 a_1}{2}$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Na $\mathbb{R}^4$ wprowadzamy strukturę przestrzeni dwuliniowej Minkowskiego (o wielkim znaczeniu w fizyce) poprzez zadanie formy dwuliniowej $\langle , \rangle$ danej macierzą:

$$G(\langle , \rangle, st) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i widzimy, że teraz rzeczywiście dla okręgów opisanych równaniami $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$ określić można wektory $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ i wtedy

$$\langle C_1, C_2 \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 - (d_1 a_2 + d_2 a_1)/2$$

Zauważmy też, że sens geometryczny mają także wektory (a, b, c, d), gdzie $a = 0$:

- jeśli $a = 0$ oraz $b^2 + c^2 > 0$, to równanie *okręgu* opisuje prostą na płaszczyźnie, której można przypisać wektor $L(0, b, c, d)$,
- dla $a = b = c = 0$ praz $d \neq 0$ żadne punkty nie spełniają tego równania i można utożsamić je z prostą niewłaściwą o współrzędnych $E(0, 0, 0, d)$.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2 \rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2 \rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2 \rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$,

(vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2 \rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1\rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2\rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2\rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2\rangle = 0$,

(vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2\rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,

(vii) $\langle C_1, L_2\rangle = -D$ jest skierowaną odległością od środka C_1 do L_2,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1\rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2\rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2\rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2\rangle = 0$,

(vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2\rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,

(vii) $\langle C_1, L_2\rangle = -D$ jest skierowaną odległością od środka C_1 do L_2,

(viii) prosta L_2 przechodzi przez środek C_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L_2, C_1\rangle = 0$,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1\rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2\rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2\rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2\rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2\rangle = 0$,

(vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2\rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,

(vii) $\langle C_1, L_2\rangle = -D$ jest skierowaną odległością od środka C_1 do L_2,

(viii) prosta L_2 przechodzi przez środek C_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L_2, C_1\rangle = 0$,

(ix) jeśli E to prosta w nieskończoności, to $\langle C_1, E\rangle = -1/2$,

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Następujące fakty są prostymi ćwiczeniami:

(i) $\langle C_1, C_1 \rangle = r_1^2$,

(ii) $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi C_1, C_2 są ortogonalne.

(iii) $\langle C_1, C_2 \rangle \pm r_1 r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy C_1, C_2 są styczne,

(iv) Jeśli C_1 jest punktem, czyli $r_1^2 = 0$, to $\langle C_1, C_2 \rangle$ równe jest minus potędze punktu C_1 względem okręgu C_2,

(v) punkt C_1 leży na okręgu C_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$,

(vi) jeśli C_1, C_2 są punktami, to $\langle C_1, C_2 \rangle = -d^2/2$, gdzie $d = \rho(C_1, C_2)$,

(vii) $\langle C_1, L_2 \rangle = -D$ jest skierowaną odległością od środka C_1 do L_2,

(viii) prosta L_2 przechodzi przez środek C_1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle L_2, C_1 \rangle = 0$,

(ix) jeśli E to prosta w nieskończoności, to $\langle C_1, E \rangle = -1/2$,

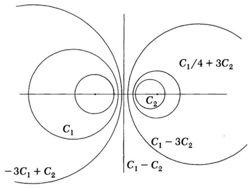
(x) wszystkie proste właściwe są prostopadłe do prostej w nieskończoności.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Niech $C_i(1, f_i, g_i, k_i)$ będą dwoma okręgami, dla $i = 1, 2$. Dla $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 + a_2 \neq 0$, określamy: $C = a_1 C_1 + a_2 C_2/(a_1 + a_2)$, czyli okrąg o środku:

$$\left(\frac{a_1 f_1 + a_2 f_2}{a_1 + a_2}, \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{a_1 + a_2} \right).$$

Jeśli $a_1 + a_2 = 0$, to zbiór $C = a_1 C_1 + a_2 C_2$ jest prostą, zwaną **prostą potęgową** okręgów C_1, C_2, zaś zbiór okręgów $C = a_1 C_1 + a_2 C_2$ (gdzie $a_1 \neq 0$ lub $a_2 \neq 0$) nazywamy **współosiowym pękiem okręgów**. Zbiór ten odpowiada $\mathrm{lin}(C_1, C_2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ lub prostej przestrzeni rzutowej w $\mathbb{RP}^3$.



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

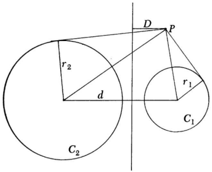
Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Twierdzenie (Casey)

Dla każdego punktu P oraz okręgów C_1, C_2 niech D będzie odległością od P do osi potęgowej $C_1 - C_2$ i niech d będzie odległością pomiędzy środkami C_1, C_2. Wówczas:

$$2Dd = (d_1^2 - r_1^2) - (d_2^2 - r_2^2),$$

jest różnicą potęg punktu P względem C_1 i C_2.

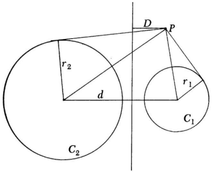


Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Twierdzenie (Casey)

Dla każdego punktu P oraz okręgów C_1, C_2 niech D będzie odległością od P do osi potęgowej $C_1 - C_2$ i niech d będzie odległością pomiędzy środkami C_1, C_2. Wówczas $2Dd = (d_1^2 - r_1^2) - (d_2^2 - r_2^2)$.



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Dowód. Na mocy własności (vii) oraz (iv) mamy:

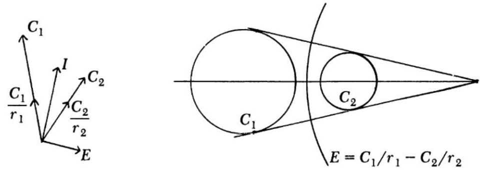
$$-D = \langle P, \frac{C_1 - C_2}{d} \rangle = (\langle P, C_1 \rangle - \langle P, C_2 \rangle)/d = (-(d_1^2 - r_1^2) + (d_2^2 - r_2^2))/2d.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Dwusieczne. Skoro $\langle C, C \rangle = r^2$, to dla okręgów C_1, C_2 o promieniach r_1, r_2 można określić wektory jednostkowe $C_1/r_1, C_2/r_2$. Przez analogię do zwykłych wektorów w przestrzeni euklidesowej można określić

$$I = C_1/r_1 + C_2/r_2, \quad E = C_1/r_1 - C_2/r_2.$$

jako nazywane **wewnętrznym i zewnętrznym okręgiem antypodobieństwa** okręgów C_1, C_2. Z punktów (viii), (ix) dowodzi się łatwo, że środki I oraz E leżą w punktach, w których przecinają się odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne wspólne styczne do C_1, C_2 (dla prostych są to: **dwusieczna wewnętrzna i zewnętrzna**!):



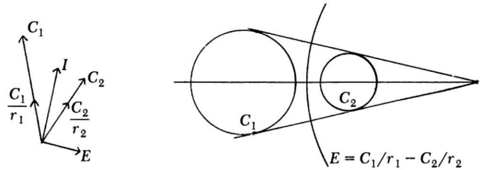
Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Inwersja. W przestrzeni dwuliniowej odbicie u' wektora U względem V (lub równolegle do V) dane jest formułą:

$$U' = \pm\frac{2\langle U, V\rangle}{\langle V, V\rangle}V \mp U.$$

i jak się okazuje w języku rozważanego iloczynu skalarnego U' jest obrazem inwersyjnym okręgu U względem okręgu V. Dla przykładu, odbicie wektora C_1 względem wektorów I, E daje wektory $C_2, -C_2$ (z dokładnością do skalarnej wielokrotności), więc inwersja C_1 w okręgach I, E daje okrąg C_2.



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Liniowa niezależność. Okręgi C_i są liniowo niezależne jeśli $\sum x_i C_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = 0$, dla wszystkich i. W szczególności trzy okręgi są liniowo niezależne jeśli żaden nie leży w pęku współosiowym pozostałych dwóch.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Liniowa niezależność. Okręgi C_i są liniowo niezależne jeśli $\sum x_i C_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = 0$, dla wszystkich i. W szczególności trzy okręgi są liniowo niezależne jeśli żaden nie leży w pęku współosiowym pozostałych dwóch.

Wniosek 1 (tw. Menelaosa, wersja ogólna)

Dane są trzy liniowo niezależne okręgi C_1, C_2, C_3. Jeśli $D_1 = a_1 C_2 + b_1 C_3$, $D_2 = a_2 C_3 + b_2 C_1$, $D_3 = a_3 C_1 + b_3 C_2$, wówczas D_1, D_2, D_3 są zależne (w tym samym pęku współosiowym) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 a_2 a_3 = -b_1 b_2 b_3$.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Liniowa niezależność. Okręgi C_i są liniowo niezależne jeśli $\sum x_i C_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = 0$, dla wszystkich i. W szczególności trzy okręgi są liniowo niezależne jeśli żaden nie leży w pęku współosiowym pozostałych dwóch.

Wniosek 1 (tw. Menelaosa, wersja ogólna)

Dane są trzy liniowo niezależne okręgi C_1, C_2, C_3. Jeśli $D_1 = a_1 C_2 + b_1 C_3$, $D_2 = a_2 C_3 + b_2 C_1$, $D_3 = a_3 C_1 + b_3 C_2$, wówczas D_1, D_2, D_3 są zależne (w tym samym pęku współosiowym) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 a_2 a_3 = -b_1 b_2 b_3$.

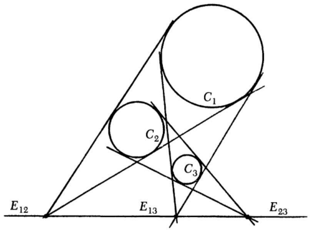
Dowód. Istnieją niezerowe x_i spełniające $\sum x_i D_i = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy poniższy układ ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Wniosek 2 (tw. Monge'a)

Niech C_1, C_2, C_3 będą liniowo niezależnymi okręgami i niech I_{ij}, E_{ij} bedą wewnętrznymi i zewnętrznymi okręgami antypodobieństwa dla C_i oraz C_j. Wówczas każdy z czterech układów okręgów jest liniowo zależny (czyli współpękowy): $\{E_{12}, E_{23}, E_{31}\}$, $\{E_{12}, I_{23}, I_{31}\}$, $\{I_{12}, E_{23}, I_{31}\}$, $\{I_{12}, I_{23}, E_{31}\}$. W szczególności środki okręgów w każdym układzie są współliniowe.



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

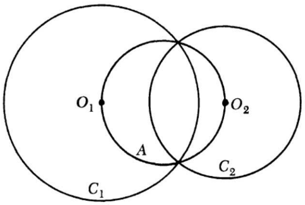
Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Uwaga. Niech C_1 będzie ortogonalny do C_2 i niech okręgi te mają środki O_1, O_2. Rozważmy **okrąg średni** postaci:

$$A = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

Wówczas $O_1 O_2$ to średnica A, ponieważ (patrz (ix)):

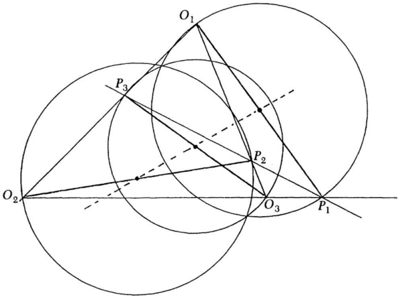
$$\langle O_i, C_i \rangle = r_i^2/2, \quad \langle O_i, C_j \rangle = -r_i^2/2 \quad \Rightarrow \langle O_i, A \rangle = 0.$$



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Wniosek. Niech C_1, C_2, C_3 będą trzema wzajemnie prostopadłymi okręgami o środkach O_1, O_2, O_3. Załóżmy, że (znormalizowane) okręgi D_1, D_2, D_3 zdefiniowane jak w twierdzeniu Menelaosa, o środkach P_1, P_2, P_3 są zależne i niech A_i będą średnimi okręgami okręgów C_i oraz D_i. Wówczas okręgi A_1, A_2, A_3 są zależne (uzyskujemy m.in. tw. Gaussa-Bodenmillera czy tw. Newtona).



Źródło: R. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Dysponując liniowo zależnym układem wektorów $\sum x_i V_i = 0$ i biorąc formę $\langle , \rangle$ z każdym z wektorów W_i dostajemy, że istnieje niezerowe rozwiązanie układu:

$$\begin{bmatrix} \langle W_1, V_1 \rangle & \dots & \langle W_1, V_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle W_n, V_n \rangle & \dots & \langle W_n, V_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dla $W_i = V_i$ widzimy, że wyznacznik Grama tego układu jest zerowy.

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Dysponując liniowo zależnym układem wektorów $\sum x_i V_i = 0$ i biorąc formę $\langle , \rangle$ z każdym z wektorów W_i dostajemy, że istnieje niezerowe rozwiązanie układu:

$$\begin{bmatrix} \langle W_1, V_1 \rangle & \dots & \langle W_1, V_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle W_n, V_n \rangle & \dots & \langle W_n, V_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dla $W_i = V_i$ widzimy, że wyznacznik Grama tego układu jest zerowy.

- **Wniosek 1.** Nie istnieją cztery parami prostopadłe okręgi na płaszczyźnie - twierdzenie o bezwładności!

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Dysponując liniowo zależnym układem wektorów $\sum x_i V_i = 0$ i biorąc formę $\langle , \rangle$ z każdym z wektorów W_i dostajemy, że istnieje niezerowe rozwiązanie układu:

$$\begin{bmatrix} \langle W_1, V_1 \rangle & \dots & \langle W_1, V_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle W_n, V_n \rangle & \dots & \langle W_n, V_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

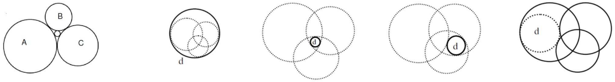
Dla $W_i = V_i$ widzimy, że wyznacznik Grama tego układu jest zerowy.

- **Wniosek 1.** Nie istnieją cztery parami prostopadłe okręgi na płaszczyźnie - twierdzenie o bezwładności!
- **Wniosek 2.** Biorąc układ czterech parami stycznych zewnętrznie okręgów o promieniach r_1, r_2, r_3, r_4 oraz $C_5 = E$ warunek $W(C_i)$ implikuje słynne (i wielokrotnie odkrywane na nowo) Twierdzenie Kartezjusza o okręgach:

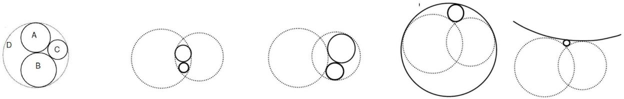
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_4} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_2 r_4} + \frac{1}{r_3 r_4}.$$

Geometria elementarna w języku algebry liniowej i poznanej już teorii

Macierze Grama układów okręgów stycznych w różnych dopuszczalnych konfiguracjach. W cytowanej pracy iloczyn skalarny jest z przeciwnym znakiem niż u nas, czyli $\langle C_1, C_2\rangle = (d_1 a_1 + d_2 a_2)/2 - b_1 b_2 - c_1 c_2$ i rozważa się go jedynie na czwórkach wektorów jednostkowych (można, po odpowiednim przeskalowaniu).



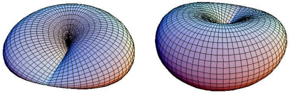
$$f=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&0&-1\\0&-1&0&-1\\0&0&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&0&-1\\0&0&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&0&-1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\-1&1&1&-1\end{bmatrix}$$



$$f=\begin{bmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&1\\-1&-1&1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\0&-1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&1&-1\\0&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\quad f=\begin{bmatrix}-1&0&1&1\\0&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

Źródło: J. Kocik, *A theorem on circle configurations*.

Warto zgłębiać związki pomiędzy algebrą liniową i geometrią elementarną!



Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{RP}^2$ jako rozmaitość nie jest zanurzalna w $\mathbb{R}^3$, Co to znaczy i jak to pokazać dowiedzą się Państwo na Topologii.

Lektury:

- A. Gorodentsev, Algebraic Geometry Start-Up Course: Projective Geometry:

  `http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/projgeom/1718/list.html`,
- N. Hitchin. *Projective Geometry* (świetny tekst!):

  `https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/files/LectureNotes/Projective_geometry/Chapter_1_Projective_geometry.pdf`,
- J. Kocik, *A theorem on circle configurations*:

  `https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0706/0706.0372.pdf`,
- D. Pedoe, *Geometry. A Comprehensive Course*, Dover, Mineola, NY, 1988.
- R. E. Pfiefer, C. Van Hook, *Circles, Vectors, and Linear Algebra*, Mathematics Magazine Vol. 66, No. 2 (1993), pp. 75-86.