Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 21, 21.05.2021 r.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią euklidesową afiniczną.

- Zbiór $R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subset H$ postaci

$$\{p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \mid a_1, \ldots, a_k \in [0, 1]\}$$

  gdzie $p_0 \in H$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne w $T(H)$ nazywamy k-**wymiarowym równoległościanem** w H **rozpiętym na wektorach** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ **zaczepionych w punkcie** p_0.

- Zbiór $S(p_0, \ldots, p_k) \subset H$ postaci

$$\{a_0p_0 + \ldots + a_kp_k \mid a_1 + \ldots + a_k = 1,\ a_i \geq 0, i = 0, \ldots, k\}$$

  gdzie $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależnym układem punktów w H, nazywamy k-**wymiarowym sympleksem** w H **rozpiętym na** $p_0, \ldots, p_k$.

Definicja

Niech $R = R(p_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie k-wymiarowym równoległościanem w afinicznej przestrzeni euklidesowej. Przez $\mu_k(R)$ określać będzie liczbę rzeczywistą zwaną **k-wymiarową miarą)** (albo k-wymiarową objętością) równoległościanu R, przy czym

$$\mu_k(R) = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

Ponadto przyjmujemy $\mu_l(R) = 0$, dla $l > k$ oraz $\mu_l(R) = \infty$, dla $l < k$.

Uwaga: „Objętość równoległościanu" to „objętość podstawy" razy „wysokość"

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ i niech γ będzie rzutem prostopadłym α_k na $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^{\perp}$. Wówczas:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot \|\gamma\|^2.$$

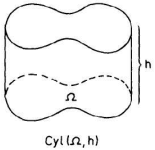
Uogólnienia naszych rezultatów.

- **Twierdzenie.** Niech $U \subseteq (\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle_{st})$ będzie hiperpłaszczyzną oraz niech $v \in U^\perp$, gdzie $\|v\| = 1$. Niech μ_n oraz μ_{n-1} będą miarami Jordana na $\mathbb{R}^n$ oraz na U. Dla dowolnego podzbioru $\Omega \subseteq U$ mierzalnego w sensie Jordana oraz dodatniej liczby $h > 0$ określamy **cylinder nad** Ω **wysokości** h jako zbiór:

$$Cyl(\Omega, h) := \{x + tv \mid x \in \Omega, 0 \leq t \leq h\}.$$

Wówczas:

$$\mu_n(Cyl(\Omega, h)) = h \cdot \mu_{n-1}(\Omega).$$

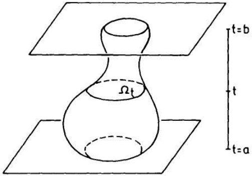


Cylinder. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Twierdzenie (Zasada Cavalieriego)

Niech Ω będzie mierzalnym (w s. J.) podzbiorem $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$, niech U będzie hiperpłaszczyzną i niech $n_0 \in U^\perp$ ma długość 1. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ niech

$$\Omega_t := \Omega \cap (tn_0 + U).$$



Ilustracja zbiorów Ω_t. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Jeśli Ω_t jest mierzalny (w s. J.) dla $a \leq t \leq b$ oraz pusty dla pozostałych t, to:

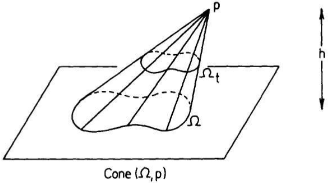
$$\mu_n(\Omega) = \int_a^b \mu_{n-1}(\Omega_t)dt.$$

Wniosek

Niech U będzie hiperpłaszczyzną w $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech Ω będzie mierzalnym (w s. J) podzbiorem U. Dla każdego elementu $p \in V \setminus U$ przez **stożek nad** Ω określamy zbiór:

$$Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \,|\, x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\},$$

czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy Ω z p.



Ilustracja zbiorów $Cone(\Omega, p)$. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Jeśli h jest odległością p od U, to $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n}\mu_{n-1}(\Omega)$.

Wniosek

Niech U będzie hiperpłaszczyzną w $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech Ω będzie mierzalnym (w s. J) podzbiorem U. Dla $p \in V \setminus U$ przez **stożek nad** Ω określamy zbiór $Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \,|\, x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$, czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy Ω z p. Jeśli h jest odległością p od U, to $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n}\mu_{n-1}(\Omega)$.

Dowód.

- Zgodnie z zasadą Cavalieriego rozważamy zbiór $\Omega_t = \Omega \cap (tn_0 + U)$, gdzie $0 \leq t \leq h$. Jest to obraz Ω przy jednokładności o środku w p o skali $\frac{h-t}{h}\Omega$.

Wniosek

Niech U będzie hiperpłaszczyzną w $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech Ω będzie mierzalnym (w s. J) podzbiorem U. Dla $p \in V \setminus U$ przez **stożek nad** Ω określamy zbiór $Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \mid x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$, czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy Ω z p. Jeśli h jest odległością p od U, to $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n}\mu_{n-1}(\Omega)$.

Dowód.

- Zgodnie z zasadą Cavalieriego rozważamy zbiór $\Omega_t = \Omega \cap (tn_0 + U)$, gdzie $0 \leq t \leq h$. Jest to obraz Ω przy jednokładności o środku w p o skali $\frac{h-t}{h}\Omega$.
- Zgodnie z twierdzeniem o zmianie miary przy przekształceniu afinicznym, $\mu_{n-1}(\Omega_t) = \left(\frac{h-t}{h}\right)^{n-1}\mu_{n-1}(\Omega)$ (zobacz macierz tej jednokładności).

Wniosek

Niech U będzie hiperpłaszczyzną w $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech Ω będzie mierzalnym (w s. J) podzbiorem U. Dla $p \in V \setminus U$ przez **stożek nad** Ω określamy zbiór $Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \,|\, x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$, czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy Ω z p. Jeśli h jest odległością p od U, to $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n}\mu_{n-1}(\Omega)$.

Dowód.

- Zgodnie z zasadą Cavalieriego rozważamy zbiór $\Omega_t = \Omega \cap (tn_0 + U)$, gdzie $0 \leq t \leq h$. Jest to obraz Ω przy jednokładności o środku w p o skali $\frac{h-t}{h}\Omega$.
- Zgodnie z twierdzeniem o zmianie miary przy przekształceniu afinicznym, $\mu_{n-1}(\Omega_t) = \left(\frac{h-t}{h}\right)^{n-1} \mu_{n-1}(\Omega)$ (zobacz macierz tej jednokładności).
- Zgodnie z zasadą Cavalieriego mamy zatem $\mu_n(Cone(\Omega, p))$ równe jest:

$$\int_0^h \left(\frac{h-t}{h}\right)^{n-1} \mu_{n-1}(\Omega)dt = h \cdot \mu_{n-1}(\Omega) \int_0^1 \tau^{n-1} d\tau = \frac{h}{n} \cdot \mu_{n-1}(\Omega).$$

Wniosek - pole, wzór 1

Niech $p_0, \dots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech $S = S(p_0, \dots, p_n)$. Niech też $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, dla $i = 1, \dots, n$ oraz $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$, dla $0 \leq i, j \leq n$. Wówczas:

$$\mu_n(S) = \frac{1}{n!}\sqrt{W(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \overset{*}{=} \frac{1}{n!}\left| \det \begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

przy czym w kolumnach macierzy z prawej strony $(*)$ są współrzędne $p_0, \dots, p_n$ w pewnym układzie bazowym $p_0 v_1, \dots, v_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Szczególny przypadek. Dla standardowego układu bazowego w $\mathbb{R}^2$ dostajemy wzór na pole S trójkąta o wierzchołkach w punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ oraz, przy okazji, warunek konieczny i wystarczający do współliniowości tych punktów. Dostajemy także równanie prostej przechodzącej przez dwa zadane punkty.

Dowód. Odejmując pierwszą kolumnę od wszystkich pozostałych dostajemy stosunkowo łatwo jedną z równości:

$$
\det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}^2 = \det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & \overrightarrow{p_0p_1} & \dots & \overrightarrow{p_0p_n} \\ | & | & & | \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}^2 =
$$

$$
= \det\begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ | & & | \end{bmatrix}^T \cdot \det\begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ | & & | \end{bmatrix} =
$$

$$
= \det\begin{bmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \dots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \dots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle \end{bmatrix} =
$$

$$
= W(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^2.
$$

Dowód cd.

- Dowód jest indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy z definicji (równoległościanu) $\mu_1(S(p_0, p_1)) = \sqrt{W(\alpha_1)}$. Rozważmy zatem sympleks rozpięty na afinicznie niezależnym układzie $p_0, \ldots, p_{n+1}$. punktów w $\mathbb{R}^n$.

Dowód cd.

- Dowód jest indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy z definicji (równoległościanu) $\mu_1(S(p_0, p_1)) = \sqrt{W(\alpha_1)}$. Rozważmy zatem sympleks rozpięty na afinicznie niezależnym układzie $p_0, \ldots, p_{n+1}$. punktów w $\mathbb{R}^n$.
- Z założenia indukcyjnego istnieje układ bazowy $p_0; v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taki, że $p_i = p_0 + a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n$ oraz

$$\mu_n(S(p_0, \ldots, p_n)) = \frac{1}{n!}|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}| = |\det \begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}|.$$

Dowód cd.

- Dowód jest indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ mamy z definicji (równoległościanu) $\mu_1(S(p_0, p_1)) = \sqrt{W(\alpha_1)}$. Rozważmy zatem sympleks rozpięty na afinicznie niezależnym układzie $p_0, \ldots, p_{n+1}$. punktów w $\mathbb{R}^n$.

- Z założenia indukcyjnego istnieje układ bazowy $p_0; v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taki, że $p_i = p_0 + a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$ oraz

$$\mu_n(S(p_0, \ldots, p_n)) = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

- Wiemy też (poprzedni fakt o mierze n-wymiarowej stożka), że $\mu_{n+1}(S(p_0, \ldots, p_{n+1})) = \frac{h}{n+1} \mu_n(S(p_0, \ldots, p_n))$. A zatem możemy wstawić uzyskaną wyżej formułę na $\mu_n(S(p_0, \ldots, p_n))$ i dostajemy...

Dowód cd.

- Mamy zatem dwa przedstawienia szukanej objętości $\mu_{n+1}(S(p_0, \ldots, p_{n+1}))$:

$$\frac{h}{(n+1)!}\left|\det\begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\det\begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n & * \\ | & | & & | & | \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|.$$

Powyższa równość wynika z rozwinięcia Laplace'a.

Dowód cd.

- Mamy zatem dwa przedstawienia szukanej objętości $\mu_{n+1}(S(p_0, \ldots, p_{n+1}))$:

$$\frac{h}{(n+1)!}\left|\det \begin{bmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\det \begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n & * \\ | & | & & | & | \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}\right|.$$

  Powyższa równość wynika z rozwinięcia Laplace'a.
- Twierdzimy, że macierz (której wyznacznik liczymy) po prawej jest macierzą współrzędnych punktów $p_0, \ldots, p_n, p_{n+1}$ w pierwotnej bazie punktowej $p_0; \beta_1, \ldots, \beta_n$ uzupełnionej o wektor $\frac{1}{h}\overrightarrow{p_{n+1}p_0}$. Mamy wtedy

$$p_{n+1} = p_0 + h\frac{1}{h}\overrightarrow{p_{n+1}p_0}.$$

  Zaś punkty $p_0, \ldots, p_n$ mają w rozszerzonym układzie identyczne n współrzędnych, jak w pierwotnym (i ostatnie równe 0). Koniec dowodu.

Wniosek - pole, wzór 2

Niech $p_0, \ldots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech $S = S(p_0, \ldots, p_n)$. Niech też $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$, dla $0 \leq i, j \leq n$. Wówczas:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right|^2.$$

Wniosek - pole, wzór 2

Niech $p_0, \ldots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ i niech $S = S(p_0, \ldots, p_n)$. Niech też $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$, dla $0 \le i, j \le n$. Wówczas:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^n \cdot (n!)^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \right|^2.$$

Przypadek szczególny. Wzór Herona. Niech $\triangle$ będzie trójkątem o bokach długości a, b, c i niech V będzie polem $\triangle$. Dla $p = (a + b + c)/2$ mamy:

$$V^2 = \frac{1}{2^2 \cdot (2!)^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & a^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & b^2 & 1 \\ c^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{|-16p(p-a)(p-b)(p-c)|}{16}.$$

Dowód wzoru 2

- Już wiemy, że

$$n! \cdot \mu_n(S) = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \right|.$$

Dowód wzoru 2

- Już wiemy, że

$$n! \cdot \mu_n(S) = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & \dots & | \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \right|.$$

- Możemy też zmodyfikować te macierze, nie zmieniając wyznaczników, i dostać:

$$n! \cdot \mu_n(S) = \left| \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ - & p_n^T & - & 1 & 0 \\ - & 0^T & - & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} | & \dots & | & | \\ p_0 & \dots & p_n & 0 \\ | & \dots & | & | \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right|.$$

Mnożymy dwie macierze i na chwilę przypominamy sobie, że p_i to wektory.

Dowód wzoru 2

- Zatem $(n! \cdot \mu_n(S))^2$ jest równe:

$$\left|\det \begin{bmatrix} \langle p_0, p_0\rangle & \dots & \langle p_0, p_n\rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle p_n, p_0\rangle & \dots & \langle p_n, p_n\rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}\right| = 2^n \cdot \left|\det \begin{bmatrix} 2\langle p_0, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n\rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n\rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}\right|.$$

  Dostaliśmy tę równość mnożąc pierwsze $n+1$ wierszy przez 2 i jednocześnie dzieląc ostatnią kolumnę przez $\frac{1}{2}$. Teraz upraszczamy ten wyznacznik.

Dowód wzoru 2

- Zatem $(n! \cdot \mu_n(S))^2$ jest równe:

$$|\det \begin{bmatrix} \langle p_0, p_0\rangle & \dots & \langle p_0, p_n\rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle p_n, p_0\rangle & \dots & \langle p_n, p_n\rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}| = 2^n \cdot |\det \begin{bmatrix} 2\langle p_0, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n\rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n\rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}|.$$

  Dostaliśmy tę równość mnożąc pierwsze $n+1$ wierszy przez 2 i jednocześnie dzieląc ostatnią kolumnę przez $\frac{1}{2}$. Teraz upraszczamy ten wyznacznik.
- Upraszczamy dalej: dla każdego k, gdzie $0 \leq k \leq n$ odejmujemy $\|p_k\|^2$-razy ostatni wiersz od $k+1$-wszego wiersza, a jednocześnie odejmujemy $\|p_k\|^2$-razy ostatnią kolumnę od kolumny $k+1$-wszej. Aby ogarnąć to, co powstanie wprowadzamy oznaczenia:

$$a_{ij} := 2\langle p_i, p_j\rangle - \|p_i\|^2$$

$$b_{ij} := 2\langle p_i, p_j\rangle - \|p_i\|^2 - \|p_j\|^2 = -\|p_i - p_j\|^2 = -d_{ij}^2.$$

Dowód wzoru 2

- Dostajemy (pamiętając, że $d_{ii} = \|p_i - p_i\| = 0$):

$$2^n \cdot (n!)^2 \mu_n(S)^2 = |\det \begin{bmatrix} 2\langle p_0, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n\rangle & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0\rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n\rangle & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}| =$$

$$= |\det \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}| \quad = |\det \begin{bmatrix} b_{00} & \dots & b_{0n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & \dots & b_{nn} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}| =$$

$$= |\det \begin{bmatrix} d_{00}^2 & \dots & d_{0n}^2 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & \dots & d_{nn}^2 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}| = |\det \begin{bmatrix} 0 & \dots & d_{0n}^2 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}|.$$

Wniosek - pole, wzór 3

Niech $p_0, \ldots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ są równej długości: $\|p_i\| = r$ tzn. jeśli wszystkie wierzchołki p_i leżą na sferze o promieniu r o środku (gdzieś, czyli) w punkcie 0, to dla $S = S(p_0, \ldots, p_n)$ mamy:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2 r^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right|.$$

Wniosek - pole, wzór 3

Niech $p_0, \ldots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ są równej długości: $\|p_i\| = r$ tzn. jeśli wszystkie wierzchołki p_i leżą na sferze o promieniu r o środku (gdzieś, czyli) w punkcie 0, to dla $S = S(p_0, \ldots, p_n)$ mamy:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2 r^2} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right|.$$

Ilustracja. Niech $\triangle$ będzie trójkątem o bokach długości a, b, c i niech V będzie polem $\triangle$. Jeśli r jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle$, to $4Vr = abc$.

$$V^2 = \frac{1}{2^{2+1} \cdot (2!)^2 \cdot r^2} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & a^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & b^2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2^{2+1} \cdot (2!)^2 \cdot r^2} \cdot 2a^2b^2c^2.$$

Wniosek - pole, wzór 3

Niech $p_0, \ldots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ są równej długości: $\|p_i\| = r$ tzn. jeśli wszystkie wierzchołki p_i leżą na sferze o promieniu r o środku (gdzieś, czyli) w punkcie 0, to dla $S = S(p_0, \ldots, p_n)$ mamy:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2 r^2} \cdot |\det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix} |.$$

Dowód. Wiemy, że $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$ to:

$$r \cdot |\det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & 1 \end{bmatrix} | = \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & r \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & r \end{bmatrix} |.$$

Wniosek - pole, wzór 3

Niech $p_0, \dots, p_n \in (\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ są równej długości: $\|p_i\| = r$ tzn. jeśli wszystkie wierzchołki p_i leżą na sferze o promieniu r o środku (gdzieś, czyli) w punkcie 0, to dla $S = S(p_0, \dots, p_n)$ mamy:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{2^{n+1}(n!)^2 r^2} \cdot \left|\det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \dots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & \dots & d_{1n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right|.$$

Dowód. Wiemy, że $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$ to (także):

$$r \cdot \left|\det \begin{bmatrix} | & & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} | & & | \\ -p_0 & \dots & -p_n \\ | & & | \\ r & & r \end{bmatrix}\right|.$$

A zatem $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$ równe jest:

- $$r \cdot |\det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & 1 \end{bmatrix}| = \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & r \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & r \end{bmatrix}|.$$
- $$r \cdot |\det \begin{bmatrix} | & & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}| = |\det \begin{bmatrix} | & & | \\ -p_0 & \dots & -p_n \\ | & & | \\ r & & r \end{bmatrix}|.$$
- A zatem wymnażając:

$$(n!)^2 \cdot \mu_n(S)^2 \cdot r^2 = |\det \begin{bmatrix} r^2 - \|p_0\|^2 & r - \langle p_0, p_1 \rangle & \dots & r^2 - \langle p_0, p_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r^2 - \langle p_0, p_n \rangle & r^2 - \langle p_1, p_n \rangle & \dots & r^2 - \|p_n\|^2 \end{bmatrix}.$$

A zatem $r \cdot n! \cdot \mu_n(S)$ równe jest:

- $r \cdot |\det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & 1 \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & 1 \end{bmatrix}| = \det \begin{bmatrix} - & p_0^T & - & r \\ & \vdots & & \vdots \\ - & p_n^T & - & r \end{bmatrix}|.$
- $r \cdot |\det \begin{bmatrix} | & & | \\ p_0 & \dots & p_n \\ | & & | \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}| = |\det \begin{bmatrix} | & & | \\ -p_0 & \dots & -p_n \\ | & & | \\ r & & r \end{bmatrix}|.$
- A zatem wymnażając:

$$(n!)^2 \cdot \mu_n(S)^2 \cdot r^2 = |\det \begin{bmatrix} r^2 - \|p_0\|^2 & r - \langle p_0, p_1 \rangle & \dots & r^2 - \langle p_0, p_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r^2 - \langle p_0, p_n \rangle & r^2 - \langle p_1, p_n \rangle & \dots & r^2 - \|p_n\|^2 \end{bmatrix}.$$

- Stąd już wynika teza, bowiem mamy:

$d_{ij}^2 = \|p_i - p_j\|^2 = \|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - 2\langle p_i, p_j \rangle = r^2 + r^2 - 2\langle p_i, p_j \rangle = 2(r^2 - \langle p_i, p_j \rangle).$

Wniosek - jeszcze jeden (ćwiczenie)

Niech $p_0, \ldots, p_{n+1}$ będą w $\mathbb{R}^n$. Wówczas dla $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$ mamy:

$$-(-2)^n \det \underbrace{\overset{2}{\begin{bmatrix} \|p_0\|^2 & p_0^T & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|p_{n+1}\|^2 & p_{n+1}^T & 1 \end{bmatrix}}}_{A} = \det \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Co więcej, następujące warunki są równoważne.

(1) Punkty $v_0, \ldots, v_{n+1}$ leżą na hiperpłaszczyźnie lub na sferze w $\mathbb{R}^n$.

(2) Istnieją $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ (nie wszystkie równe 0) takie, że $v = (v_0, \ldots, v_{n+1})$ spełniają $a\|v\|^2 + 2\langle b, v\rangle + c = 0$;

(3) $\det A = 0$.

Przykładowe zastosowanie (sprawdź!): twierdzenie Ptolemeusza o czworokącie.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową liniową, zorientowaną (przez pewną bazę). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Iloczynem wektorowym układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ nazywamy wektor β, oznaczany dalej: $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_{n-1}$ taki, że:

(i) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo zależny, to $\beta = 0$,

(ii) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo niezależny, to:

- $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^{\perp}$,
- $\|\beta\| = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}$,
- baza $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ jest dodatnio zorientowana.

Definicja

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie n wymiarową przestrzenią euklidesową liniową, zorientowaną (przez pewną bazę). Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ będzie układem wektorów przestrzeni V. Iloczynem wektorowym układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ nazywamy wektor β, oznaczany dalej: $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_{n-1}$ taki, że:

(i) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo zależny, to $\beta = 0$,

(ii) jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ jest liniowo niezależny, to:

- $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^{\perp}$,
- $\|\beta\| = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})}$,
- baza $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ jest dodatnio zorientowana.

Definicja ta ma ważne motywacje fizyczne; wiele momentów fizycznych za pomocą iloczynu wektorowego definiuje się moment siły lub moment pędu.

Przykład. W $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ mamy orientację wyznaczoną przez (przeciwnie zorientowaną do st) bazę:

$$((0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)).$$

Niech $\alpha_1 = (1,0,2)$ oraz $\alpha_2 = (3,2,0)$. Wówczas:

- $\mathrm{lin}((1,0,2),(3,2,1))^{\perp} = \mathrm{lin}((4,-5,-2))$.
- $\sqrt{W(\alpha_1,\alpha_2)} = \sqrt{45}$.

Wektor $(4,-5,-2)$ jest prostopadły do α_1, α_2, ma długość $\sqrt{45}$ i baza

$$\alpha_1, \alpha_2, (4,-5,-2)$$

jest przeciwnie zorientowana z bazą standardową, a więc zgodna z wybraną orientacją. Mamy więc:

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = (4,-5,-2).$$

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Idea dowodu. Weźmiemy wektor γ równy wektorowi z prawej strony równości wyżej i sprawdzimy, że

- $\gamma \perp \alpha$,
- $\gamma \perp \beta$,
- $\|\gamma\|^2 = W(\alpha, \beta)$,
- sprawdzenie czy pewne bazy są zgodnie zorientowane.

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Dowód.

- Mamy $\langle \alpha, \gamma \rangle = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Dowód.

- Mamy $\langle \alpha, \gamma \rangle = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$
- Analogicznie $\langle \beta, \gamma \rangle = 0$. Stąd $\gamma \in \operatorname{lin}(\alpha, \beta)^{\perp}$.

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Dowód. Mamy dalej:

$$\begin{aligned} \|\gamma\|^2 &= \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^2 = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, \beta \rangle - \langle \alpha, \beta \rangle^2 = W(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Stwierdzenie

Niech $(V, \langle , \rangle)$ będzie trójwymiarową zorientowaną przestrzenią euklidesową liniową i niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ będzie jej bazą ortonormalną, dodatnio zorientowaną. Dla dowolnych wektorów $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ oraz $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$. zachodzi

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \beta_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \beta_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \beta_3.$$

Dowód. Gdy α, β są liniowo niezależne, to dla $\mathcal{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$ oraz $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\det M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \\ a_3 & b_3 & \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Ważne (przykładowe) obserwacje. Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy:

- $u \times v = -v \times u$,
- $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
- $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.
- $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

W geometrii analitycznej w przestrzeni afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_{st})$ iloczyn wektorowy przydaje się do różnych rachunków (często występując obok iloczynu skalarnego), dla przykładu (szczegóły na ćwiczeniach):

- wyznaczanie odległości punktu od prostej (w przestrzeni),
- wyznaczanie odległości między prostymi,
- wyznaczanie pól, objętości,
- równanie normalne płaszczyzny.