Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 20, 18.05.2021 r.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$, oraz niech $\langle\ ,\ \rangle : T(H) \times T(H) \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym.

- Parę $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ nazywamy **przestrzenią euklidesową afiniczną**.
- **Odległością** punktów $p, q \in H$ nazywamy długość wektora łączącego p z q. Liczbę tę oznaczamy $\rho(p, q)$. Zatem $\rho(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$, oraz niech $\langle\,,\,\rangle : T(H) \times T(H) \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym.

- Parę $(H, \langle\,,\,\rangle)$ nazywamy **przestrzenią euklidesową afiniczną**.
- **Odległością** punktów $p, q \in H$ nazywamy długość wektora łączącego p z q. Liczbę tę oznaczamy $\rho(p, q)$. Zatem $\rho(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

Przykłady.

- Przestrzeń euklidesowa liniowa jest przestrzenią euklidesową afiniczną.
- Jeśli M jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej euklidesowej $(H, \langle\,,\,\rangle)$, to $(M, \langle\,,\,\rangle|_M)$ jest przestrzenią euklidesową afiniczną.

Definicja

Niech H będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$, oraz niech $\langle\, , \rangle : T(H) \times T(H) \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym.

- Parę $(H, \langle\, , \rangle)$ nazywamy **przestrzenią euklidesową afiniczną**.
- **Odległością** punktów $p, q \in H$ nazywamy długość wektora łączącego p z q. Liczbę tę oznaczamy $\rho(p, q)$. Zatem $\rho(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\|$.

Przykłady.

- Przestrzeń euklidesowa liniowa jest przestrzenią euklidesową afiniczną.
- Jeśli M jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej euklidesowej $(H, \langle\, , \rangle)$, to $(M, \langle\, , \rangle|_M)$ jest przestrzenią euklidesową afiniczną.

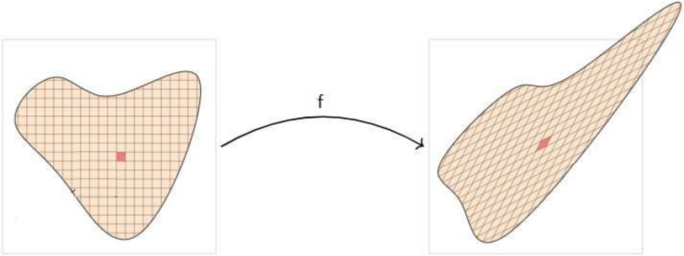
Ćwiczenie

Przestrzeń euklidesowa afiniczna $(H, \langle\, , \rangle)$ z funkcją ρ jest przestrzenią metryczną.

Cel: w przestrzeni euklidesowej afinicznej wprowadzimy pojęcie *miary* oraz określimy *klasy obiektów* na których ją wyznaczamy, np.

- miara 1-wymiarowa (długość) odcinka,
- miara 2-wymiarowa (pole) trójkąta,
- miara 3-wymiarowa (objętość) sześcianu itd.

Zastanowimy się też jak znane nam klasy przekształceń liniowych i afinicznych zmieniają te obiekty i jak zmienia się ich miara.



Definicja

Mówimy, że układ $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest **układem bazowym prostopadłym** (odp.: **układem bazowym ortonormalnym**) przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, jeśli p_0 jest punktem przestrzeni H oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą prostopadłą (odp.: bazą ortonormalną) przestrzeni euklidesowej liniowej $(T(H), \langle\ ,\ \rangle)$.

Definicja

Mówimy, że układ $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest **układem bazowym prostopadłym** (odp.: **układem bazowym ortonormalnym**) przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, jeśli p_0 jest punktem przestrzeni H oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą prostopadłą (odp.: bazą ortonormalną) przestrzeni euklidesowej liniowej $(T(H), \langle\ ,\ \rangle)$.

Przykład. Niech

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4\}$$

i niech $\langle\ ,\ \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Wówczas

$$(1, 2, 0); (1, 1, 1), (4, -5, 1)$$

jest prostopadłym układem bazowym przestrzeni afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle|_H)$, a układ

$$(1, 2, 0); \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{42}}(4, -5, 1)$$

jest ortonormalnym układem bazowym tej przestrzeni.

Definicja

Mówimy, że układ $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest **układem bazowym prostopadłym** (odp.: **układem bazowym ortonormalnym**) przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\, , \,\rangle)$, jeśli p_0 jest punktem przestrzeni H oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą prostopadłą (odp.: bazą ortonormalną) przestrzeni euklidesowej liniowej $(T(H), \langle\, , \,\rangle)$.

Definicja

Niech $(H, \langle\, , \,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $M \subseteq H$ będzie podprzestrzenią przestrzeni H.

- **Rzutem prostopadłym** na M nazywamy przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ będące rzutem na M wzdłuż $q + T(M)^{\perp}$, dla pewnego $q \in H$.
- **Symetrią prostopadłą** względem M nazywamy przekszt. af. $g : H \to H$ będące symetrią względem M wzdłuż $q + T(M)^{\perp}$, dla pewnego $q \in H$.

Uwaga - wniosek z teorii przestrzeni euklidesowych

Niech $M \subseteq H$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\,,\,\rangle)$ Niech $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem bazowym ortogonalnym przestrzeni M i niech $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni $T(M)^{\perp}$. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ rzut prostopadły punktu $p_0 + \alpha$ na M wynosi:

$$p_0 + \frac{\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}\alpha_1 + \ldots + \frac{\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}\alpha_k,$$

a obraz punktu $p_0 + \alpha$ w symetrii prostopadłej względem M wynosi:

$$p_0 + \left(\frac{\langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}\alpha_1 + \ldots + \frac{\langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}\alpha_k\right) - \left(\frac{\langle \alpha, \alpha_{k+1} \rangle}{\langle \alpha_{k+1}, \alpha_{k+1} \rangle}\alpha_{k+1} + \ldots + \frac{\langle \alpha, \alpha_n \rangle}{\langle \alpha_n, \alpha_n \rangle}\alpha_n\right).$$

Jeśli układ $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest ortonormalny, to powyższe formuły przybierają postaci: $p_0 + \langle \alpha, \alpha_1 \rangle\alpha_1 + \ldots + \langle \alpha, \alpha_k \rangle\alpha_k$, oraz

$$p_0 + (\langle \alpha, \alpha_1 \rangle\alpha_1 + \ldots + \langle \alpha, \alpha_k \rangle\alpha_k) - (\langle \alpha, \alpha_{k+1} \rangle\alpha_{k+1} + \ldots + \langle \alpha, \alpha_n \rangle\alpha_n).$$

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi. Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ jest **izometrią** przestrzeni euklidesowej $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ jeśli:

- f jest izomorfizmem przestrzeni afinicznej H_1 na przestrzeń afiniczną H_2,
- pochodna $f' : T(H_1) \to T(H_2)$ jest izometrią $(T(H_1), \langle\ ,\ \rangle_1)$ na $(T(H_2), \langle\ ,\ \rangle_2)$.

Dla przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ izometrię przestrzeni $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ na $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ nazywamy **izometrią przestrzeni euklidesowej afinicznej** $(H, \langle\ ,\ \rangle)$.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi. Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ jest **izometrią** przestrzeni euklidesowej $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ jeśli:

- f jest izomorfizmem przestrzeni afinicznej H_1 na przestrzeń afiniczną H_2,
- pochodna $f' : T(H_1) \to T(H_2)$ jest izometrią $(T(H_1), \langle\ ,\ \rangle_1)$ na $(T(H_2), \langle\ ,\ \rangle_2)$.

Dla przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ izometrię przestrzeni $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ na $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ nazywamy **izometrią przestrzeni euklidesowej afinicznej** $(H, \langle\ ,\ \rangle)$.

Przykłady:

- Przesunięcie o wektor, jest izometrią przestrzeni afinicznej $(H, \langle\ ,\ \rangle)$.
- Symetria prostopadła względem podprzestrzeni afinicznej M.
- Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie 2-wymiarową przestrzenią euklidesową afiniczną i załóżmy, że w $T(H)$ wybrana jest orientacja. Dla punktu $p \in H$ przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p) = p$ oraz $f' : T(H) \to T(H)$ jest obrotem o kąt θ nazywamy **obrotem wokół punktu** p o kąt θ.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$, $(H_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi. Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ jest **izometrią** przestrzeni euklidesowej $(H_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$ na przestrzeń euklidesową $(H_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ jeśli:

- f jest izomorfizmem przestrzeni afinicznej H_1 na przestrzeń afiniczną H_2,
- pochodna $f' : T(H_1) \to T(H_2)$ jest izometrią $(T(H_1), \langle\, ,\, \rangle_1)$ na $(T(H_2), \langle\, ,\, \rangle_2)$.

Dla przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ izometrię przestrzeni $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ na $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ nazywamy **izometrią przestrzeni euklidesowej afinicznej** $(H, \langle\, ,\, \rangle)$.

Wniosek

Jeśli $(H_1, \langle\, ,\, \rangle_1)$, $(H_2, \langle\, ,\, \rangle_2)$ są przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi oraz $\mathcal{A}_i$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $(T(H_i), \langle\, ,\, \rangle_i)$, dla $i = 1, 2$, to przekształcenie afiniczne $f : H_1 \to H_2$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M(f')_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2}$ jest ortogonalna.

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi i niech ρ_i oznacza odległość w przestrzeni $(H_i, \langle\ ,\ \rangle_i)$, dla $i = 1, 2$. Powiemy, że funkcja $f : H_1 \to H_2$ **zachowuje odległość punktów**, jeśli dla każdych $p, q \in H_1$:

$$\rho_1(p, q) = \rho_2(f(p), f(q)).$$

Definicja

Niech $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ będą przestrzeniami euklidesowymi afinicznymi i niech ρ_i oznacza odległość w przestrzeni $(H_i, \langle\ ,\ \rangle_i)$, dla $i = 1, 2$. Powiemy, że funkcja $f : H_1 \to H_2$ **zachowuje odległość punktów**, jeśli dla każdych $p, q \in H_1$:

$$\rho_1(p, q) = \rho_2(f(p), f(q)).$$

Fakt

Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech ρ będzie odległością w tej przestrzeni. Dla dowolnego przekształcenia afinicznego[a] $f : H \to H$ następujące warunki są równoważne:

(i) f jest izometrią przestrzeni H,

(ii) f zachowuje odległość punktów.

[a] Uwaga: można wykazać, że jeśli funkcja $f : H \to H$ zachowuje odległość, to musi być przekształceniem afinicznym. Jest to tw. Mazura-Ulama. Dowód: w skrypcie dr. Koźniewskiego.

Dowód.

- Zacznijmy od (i) $\Rightarrow$ (ii). Zgodnie z (i) przekształcenie $f' : T(H) \to T(H)$ zachowuje iloczyn skalarny, więc f' zachowuje normę wektorów. Stąd dla każdych punktów $p, q \in H$ mamy:

$$\rho(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|f'(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(p, q),$$

czyli f zachowuje odległość punktów.

Dowód.

- Zacznijmy od (i) $\Rightarrow$ (ii). Zgodnie z (i) przekształcenie $f' : T(H) \to T(H)$ zachowuje iloczyn skalarny, więc f' zachowuje normę wektorów. Stąd dla każdych punktów $p, q \in H$ mamy:

$$\rho(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|f'(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(p, q),$$

  czyli f zachowuje odległość punktów.

- Przypuśćmy teraz, że f jest przekształceniem afinicznym. Wówczas dla każdego punktu $p \in H$ oraz każdego wektora $\alpha \in T(H)$ mamy

$$f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}.$$

Dowód.

- Zacznijmy od (i) $\Rightarrow$ (ii). Zgodnie z (i) przekształcenie $f' : T(H) \to T(H)$ zachowuje iloczyn skalarny, więc f' zachowuje normę wektorów. Stąd dla każdych punktów $p, q \in H$ mamy:

$$\rho(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|f'(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(p, q),$$

czyli f zachowuje odległość punktów.

- Przypuśćmy teraz, że f jest przekształceniem afinicznym. Wówczas dla każdego punktu $p \in H$ oraz każdego wektora $\alpha \in T(H)$ mamy

$$f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}.$$

- Stąd:

$$\|f'(\alpha)\| = \|\overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}\| = \rho(f(p), f(p+\alpha)) \overset{(ii)}{=} \rho(p, p+\alpha) = \|\overrightarrow{p\,(p+\alpha)}\| = \|\alpha\|.$$

Dowód.

- Zacznijmy od (i) $\Rightarrow$ (ii). Zgodnie z (i) przekształcenie $f' : T(H) \to T(H)$ zachowuje iloczyn skalarny, więc f' zachowuje normę wektorów. Stąd dla każdych punktów $p, q \in H$ mamy:

$$\rho(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|f'(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(p, q),$$

czyli f zachowuje odległość punktów.

- Przypuśćmy teraz, że f jest przekształceniem afinicznym. Wówczas dla każdego punktu $p \in H$ oraz każdego wektora $\alpha \in T(H)$ mamy

$$f'(\alpha) = \overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}.$$

- Stąd:

$$\|f'(\alpha)\| = \|\overrightarrow{f(p)f(p+\alpha)}\| = \rho(f(p), f(p+\alpha)) \overset{(ii)}{=} \rho(p, p+\alpha) = \|\overrightarrow{p\,(p+\alpha)}\| = \|\alpha\|.$$

- Zatem f' zachowuje długość wektorów, czyli f jest izometrią przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, \langle\, , \rangle)$.

Definicja

Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. **Odległością punktu** $p \in H$ **do podprzestrzeni** $M \subseteq H$ nazywamy odległość punktu p od jego rzutu prostopadłego na M. Odległość tę oznaczamy $\rho(p, M)$.

Definicja

Niech $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. **Odległością punktu** $p \in H$ **do podprzestrzeni** $M \subseteq H$ nazywamy odległość punktu p od jego rzutu prostopadłego na M. Odległość tę oznaczamy $\rho(p, M)$.

Przykład. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ rozpatrzmy:

$$M = (2,3,1) + \operatorname{lin}((1,2,-1)) \quad \text{i punkt} \quad p = (5,4,7) \notin M.$$

Mamy $p = (2,3,1) + (3,1,6)$, a więc rzut prostopadły p na M to

$$(2,3,1) + \frac{\langle (3,1,6),(1,2,-1) \rangle}{\langle (1,2,-1),(1,2,-1) \rangle}(1,2,-1) = (2,3,1) - \frac{1}{6}(1,2,-1) = \left(\frac{11}{6}, \frac{16}{6}, \frac{7}{6}\right).$$

A zatem odległość punktu p od prostej M równa jest

$$\rho\left((5,4,7), \left(\frac{11}{6}, \frac{16}{6}, \frac{7}{6}\right)\right) = \left\|\frac{1}{6}(19,8,35)\right\| = \frac{\sqrt{1650}}{6} = \sqrt{\frac{275}{6}}$$

Definicja

Niech $(H, \langle\, , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną. **Odległością punktu** $p \in H$ **do podprzestrzeni** $M \subseteq H$ nazywamy odległość punktu p od jego rzutu prostopadłego na M. Odległość tę oznaczamy $\rho(p, M)$.

Uwaga - wniosek z twierdzenia Pitagorasa

Jeśli M jest podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej afinicznej H i p jest punktem przestrzeni H, to dla każdego punktu $q \in M$ zachodzi $\rho(p, q) \geq \rho(p, M)$.

Dowód. Niech p_0 będzie rzutem prostopadłym punktu p na M. Mamy zatem $\rho(p, M) = \rho(p, p_0)$. Przy tym $\overrightarrow{pp_0} \perp \overrightarrow{p_0q}$, dla każdego $q \in M$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa

$$\|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp_0}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0q}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(p, q) = \|\overrightarrow{pq}\| \geq \|\overrightarrow{pp_0}\| = \rho(p, p_0).$$

Uwaga

W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech M będzie podprzestrzenią opisaną równaniem[a] $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Wówczas odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od M wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

[a] Podprzestrzeń w $(\mathbb{R}^n)$ opisaną jednym równaniem nazywamy **hiperpłaszczyzną**.

Uwaga

W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech M będzie podprzestrzenią opisaną równaniem[a] $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Wówczas odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od M wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

[a] Podprzestrzeń w $(\mathbb{R}^n)$ opisaną jednym równaniem nazywamy **hiperpłaszczyzną**.

Wzór ten uogólnia się bez zmian na dowolną przestrzeń euklidesową afiniczną $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ i jej podprzestrzeń M wymiaru $\dim H - 1$ pod warunkiem, że

$$\begin{aligned} M &= \{p_0 + x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n \,|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}, \\ p &= \ p_0 + y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n \end{aligned}$$

dla pewnego ortonormalnego układu bazowego $p_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni H.

Uwaga

W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech M będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Wówczas odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od M wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Dowód.

- Mamy $T(M) = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))^\perp$. Stąd $T(M)^\perp = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$.

Uwaga

W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech M będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Wówczas odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od M wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Dowód.

- Mamy $T(M) = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))^\perp$. Stąd $T(M)^\perp = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$.
- Niech $q = (z_1, \ldots, z_n)$ będzie rzutem prostopadłym punktu p na M. Zatem $p - q \in \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$. A więc istnieje takie $t \in \mathbb{R}$, że $p - q = t(a_1, \ldots, a_n)$

Uwaga

W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech M będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Wówczas odległość punktu $p = (y_1, \ldots, y_n)$ od M wynosi:

$$\rho(p, M) = \frac{|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Dowód.

- Mamy $T(M) = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))^\perp$. Stąd $T(M)^\perp = \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$.
- Niech $q = (z_1, \ldots, z_n)$ będzie rzutem prostopadłym punktu p na M. Zatem $p - q \in \mathrm{lin}((a_1, \ldots, a_n))$. A więc istnieje takie $t \in \mathbb{R}$, że $p - q = t(a_1, \ldots, a_n)$
- A zatem musimy wyznaczyć t, bowiem

$$\rho(p, M) = \|p - q\| = |t|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}. \qquad (\spadesuit)$$

- Mamy
$$\begin{aligned}
t(a_1^2+\ldots+a_n^2) &= \langle\, t(a_1,\ldots,a_n),(a_1,\ldots,a_n)\,\rangle = \\
&= \langle\, (y_1-z_1,\ldots,y_n-z_n),(a_1,\ldots,a_n)\,\rangle = \\
&= a_1y_1+\ldots+a_ny_n-\underbrace{a_1z_1-\ldots-a_nz_n}_{\in M} = \\
&= a_1y_1+\ldots+a_ny_n-b,
\end{aligned}$$

- Mamy

$$
\begin{aligned}
t(a_1^2 + \ldots + a_n^2) &= \langle\, t(a_1, \ldots, a_n), (a_1, \ldots, a_n)\,\rangle = \\
&= \langle\, (y_1 - z_1, \ldots, y_n - z_n), (a_1, \ldots, a_n)\,\rangle = \\
&= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - \underbrace{a_1 z_1 - \ldots - a_n z_n}_{\in M} = \\
&= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b,
\end{aligned}
$$

- A więc:

$$
t = \frac{a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.
$$

- Mamy

$$\begin{aligned} t(a_1^2 + \ldots + a_n^2) &= \langle\, t(a_1, \ldots, a_n), (a_1, \ldots, a_n) \,\rangle = \\ &= \langle\, (y_1 - z_1, \ldots, y_n - z_n), (a_1, \ldots, a_n) \,\rangle = \\ &= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - \underbrace{a_1 z_1 - \ldots - a_n z_n}_{\in M} = \\ &= a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b, \end{aligned}$$

- A więc:

$$t = \frac{a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

- Wstawiamy wyliczone $|t|$ do (♠) dostajemy:

$$\rho(p, M) = \left| \frac{a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \right| \cdot \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \frac{|a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

Definicja

Niech H będzie przestrzenią euklidesową afiniczną.

- Zbiór $R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subset H$ postaci
$$\{p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \mid a_1, \ldots, a_k \in [0, 1]\}$$
gdzie $p_0 \in H$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liniowo niezależne w $T(H)$ nazywamy k-**wymiarowym równoległościanem** w H **rozpiętym na wektorach** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ **zaczepionych w punkcie** p_0.

- Zbiór $S(p_0, \ldots, p_k) \subset H$ postaci
$$\{a_0p_0 + \ldots + a_kp_k \mid a_1 + \ldots + a_k = 1,\ a_i \geq 0, i = 0, \ldots, k\}$$
gdzie $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależnym układem punktów w H, nazywamy k-**wymiarowym sympleksem** w H **rozpiętym na** $p_0, \ldots, p_k$.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie

Dla każdego układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ mamy nierówność $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$. Co więcej następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$.

Definicja

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$. **Macierzą Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy macierz $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in M_k(\mathbb{R})$, która w i-tym wierszu i j-tej kolumnie ma element $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. **Wyznacznikiem Grama** układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nazywamy liczbę $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \det G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Twierdzenie

Dla każdego układu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$ mamy nierówność $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \geq 0$. Co więcej następujące warunki są równoważne:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny,

(b) $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) > 0$.

Intuicja. Pierwiastek z wyznacznika Grama układu wektorów to objętość równoległościanu rozpiętego przez te wektory (zaczepione w jakimś punkcie).

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama). Wykazaliśmy następującą uwagę.

Uwaga

Dla układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \,\rangle)$ oraz dla bazy ortonormalnej $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tej przestrzeni niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times k$ mającą w j-tej kolumnie współrzędne wektora α_j w bazie $\beta_1, \ldots, \beta_n$, to znaczy: $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} = \langle \alpha_j, \beta_i \rangle$, dla $1 = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A^T A.$$

W szczególności dla $k = n$ mamy $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\det A)^2$.

Dowód (nieujemności wyznacznika Grama). Wykazaliśmy następującą uwagę.

Uwaga

Dla układu wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ oraz dla bazy ortonormalnej $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tej przestrzeni niech A będzie macierzą rozmiaru $n \times k$ mającą w j-tej kolumnie współrzędne wektora α_j w bazie $\beta_1, \ldots, \beta_n$, to znaczy: $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} = \langle \alpha_j, \beta_i \rangle$, dla $1 = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = A^T A.$$

W szczególności dla $k = n$ mamy $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\det A)^2$.

Przykład. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy układ wektorów $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 2)$. Wówczas $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$, $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 3$, $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 6$. Stąd:

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ mamy:

  $$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$

  Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.
- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo zależny, to kolumny A są liniowo zależne (one zawierają współrzędne α_j w bazie $\mathcal{B}$.

Dowód (wyznacznik Grama dodatni tylko na lnz układzie).

- Niech $W = \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz niech $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni W.
- Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ jest bazą W, to $k = m$ oraz dla $A = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ mamy:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = G(h|_W, \mathcal{A}) = A^T \cdot G(h_W, \mathcal{B}) \cdot A = A^T \cdot I \cdot A.$$
Skoro A jest odwracalna, to $(\det A)^2 = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.
- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo zależny, to kolumny A są liniowo zależne (one zawierają współrzędne α_j w bazie $\mathcal{B}$.
- Kolumny $A^T A$ to kombinacje liniowe kolumn macierzy A, więc i one są liniowo zależne. Zatem $\det(A^T A) = 0$.

Definicja

Niech $R = R(p_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie k-wymiarowym równoległościanem w afinicznej przestrzeni euklidesowej. Przez $\mu_k(R)$ określać będzie liczbę rzeczywistą zwaną **k-wymiarową miarą)** (albo k-wymiarową objętością) równoległościanu R, przy czym

$$\mu_k(R) = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

Ponadto przyjmujemy $\mu_l(R) = 0$, dla $l > k$ oraz $\mu_l(R) = \infty$, dla $l < k$.

Definicja

Niech $R = R(p_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ będzie k-wymiarowym równoległościanem w afinicznej przestrzeni euklidesowej. Przez $\mu_k(R)$ określać będzie liczbę rzeczywistą zwaną **k-wymiarową miarą)** (albo k-wymiarową objętością) równoległościanu R, przy czym

$$\mu_k(R) = \sqrt{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}.$$

Ponadto przyjmujemy $\mu_l(R) = 0$, dla $l > k$ oraz $\mu_l(R) = \infty$, dla $l < k$.

Uwaga: „Objętość równoległościanu” to „objętość podstawy” razy „wysokość"

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ i niech γ będzie rzutem prostopadłym α_k na $\mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^\perp$. Wówczas:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = W(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \cdot \|\gamma\|^2.$$

Dowód.

- Niech $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$. Mamy $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $\alpha_k = \beta + \gamma$, dla pewnego $\beta \in W$. A zatem:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta + \gamma \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \beta + \gamma, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \beta + \gamma, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \beta + \gamma, \beta + \gamma \rangle \end{vmatrix}$$

Dowód.

- Niech $W = \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$. Mamy $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $\alpha_k = \beta + \gamma$, dla pewnego $\beta \in W$. A zatem:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta + \gamma \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta + \gamma \rangle \\ \langle \beta + \gamma, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \beta + \gamma, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \beta + \gamma, \beta + \gamma \rangle \end{vmatrix}$$

- Skoro $\gamma \in \text{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})^{\perp}$ oraz $\beta \perp \gamma$, to mamy:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta \rangle \\ \langle \beta, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \beta, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \beta, \beta \rangle + \langle \gamma, \gamma \rangle \end{vmatrix}$$

Dowód.

- Niech $\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_{k-1}\alpha_{k-1}$. Wtedy po odjęciu od n tego wiersza i-tego wiersza przemnożonego przez a_i, dla wszystkich $1 \leq i \leq k-1$, wyznacznik się nie zmienia i dostajemy:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta \rangle \\ \langle 0, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle 0, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \gamma, \gamma \rangle \end{vmatrix}.$$

Dowód.

- Niech $\beta = a_1\alpha_1 + \ldots + a_{k-1}\alpha_{k-1}$. Wtedy po odjęciu od n tego wiersza i-tego wiersza przemnożonego przez a_i, dla wszystkich $1 \leq i \leq k-1$, wyznacznik się nie zmienia i dostajemy:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_1, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_1, \beta \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_2, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_2, \beta \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_{k-1}, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \alpha_{k-1}, \beta \rangle \\ \langle 0, \alpha_1 \rangle & \ldots & \langle 0, \alpha_{k-1} \rangle & \langle \gamma, \gamma \rangle \end{vmatrix}.$$

- Po odjęciu od n tej kolumny i-tej kolumny przemnożonej przez a_i, dla wszystkich $1 \leq i \leq k-1$, wyznacznik się nie zmienia i **ostatni wiersz się nie zmienia**, zaś ostatnia kolumna staje się *transpozycją* ostatniego wiersza, co oznacza, że:

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) & 0 \\ 0 & \|\gamma\|^2 \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie

Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni euklidesowej afinicznej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ w siebie (np. izometrią). Dla dowolnego układu bazowego $(p_0; \mathcal{A}) = (p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ w V zachodzi równość:

$$\mu_n(R(\phi(p_0); \phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n))) = |\det(\phi')| \cdot \mu_n(R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Twierdzenie

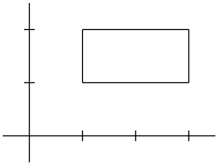
Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni euklidesowej afinicznej $(V, \langle\,,\,\rangle)$ w siebie (np. izometrią). Dla dowolnego układu bazowego $(p_0; \mathcal{A}) = (p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ w V zachodzi równość:

$$\mu_n(R(\phi(p_0); \phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n))) = |\det(\phi')| \cdot \mu_n(R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

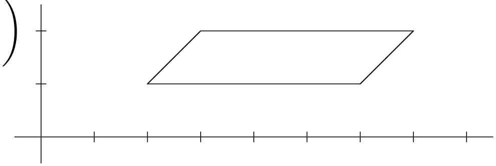
Przykład. Bierzemy $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\phi(x, y) = (2x + y - 1, y).$$

Równoległobok $R((1,1); (2,0), (0,1))$ przechodzi na $R((2,1); (4,0), (1,1))$.



$$M(\phi')^{st}_{st} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Dowód.

- Zakładamy, że $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną V. Wiemy, że:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
$$G(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Dowód.

- Zakładamy, że $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną V. Wiemy, że:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
$$G(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$
- Mamy też: $M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\phi')_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, czyli
$$\det(M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \det(\phi') \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}).$$

Dowód.

- Zakładamy, że $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną V. Wiemy, że:

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}},$$
$$G(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

- Mamy też: $M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(\phi')_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, czyli

$$\det(M(\phi')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = \det(\phi') \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}).$$

- Zatem

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det((M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^T \cdot det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}) = (det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^2$$
$$W(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (\det(\phi') \cdot \det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}))^2.$$

Dowód.

- Zakładamy, że $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną V. Wiemy, że:
$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^T \cdot M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}},$$
$$G(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (M(\phi')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^T \cdot M(\phi')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}.$$
- Mamy też: $M(\phi')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = M(\phi')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, czyli
$$\det(M(\phi')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) = \det(\phi') \cdot \det(M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}).$$
- Zatem
$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det((M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}))^T \cdot det(M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}) = (det(M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}))^2$$
$$W(\phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n)) = (\det(\phi') \cdot \det(M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}))^2.$$
- Stąd rzeczywiście:
$$\mu_n(R(\phi(p_0); \phi'(\alpha_1), \ldots, \phi'(\alpha_n))) = |\det(\phi')| \cdot \mu_n(R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)).$$

Kilka uwag o wyznaczaniu objętości innych podzbiorów przestrzeni afinicznej.

- **Krok 1.** Bierzemy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ i ustalamy w niej bazę $\mathcal{A}$. Niech $P_1, \ldots, P_s$ będzie zbiorem równoległościanów rozpiętych przez skalarne wielokrotności wektorów z $\mathcal{A}$ o rozłącznych wnętrzach. Wówczas określamy:

$$\mu_n(P_1 \cup \ldots \cup P_s) = \mu_n(P_1) + \ldots + \mu_n(P_s).$$

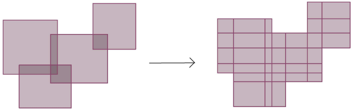
Kilka uwag o wyznaczaniu objętości innych podzbiorów przestrzeni afinicznej.

- **Krok 1.** Bierzemy przestrzeń $\mathbb{R}^n$ i ustalamy w niej bazę $\mathcal{A}$. Niech $P_1, \ldots, P_s$ będzie zbiorem równoległościanów rozpiętych przez skalarne wielokrotności wektorów z $\mathcal{A}$ o rozłącznych wnętrzach. Wówczas określamy:

$$\mu_n(P_1 \cup \ldots \cup P_s) = \mu_n(P_1) + \ldots + \mu_n(P_s).$$

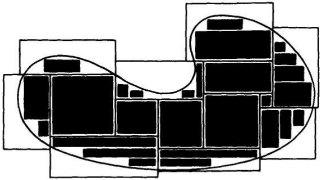
- **Krok 2.** Rozważamy zbiór równoległościanów $P_1, \ldots, P_s$ rozpiętych przez skalarne wielokrotności wektorów z $\mathcal{A}$, ale nie zakładamy, że ich wnętrza są rozłączne. Nietrudno widzieć, że można dokonać ich dekompozycji na sumę prostokątów $Q_1, \ldots, Q_r$ o rozłącznych wnętrzach, jak w poprzednim kroku.

  Co więcej, okazuje się, że niezależnie od wybranej dekompozycji wartość $\mu_n(Q_1 \cup \ldots \cup Q_r)$ jest taka sama, co pozwala zdefiniować μ_n na $P_1 \cup \ldots \cup P_s$.



Przykład dekompozycji zbioru prostokątów o bokach równoległych do ustalonej bazy $\mathbb{R}^2$. Źródło: Wikipedia.

- **Krok 3.** Bierzemy podzbiór **ograniczony** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, to znaczy: Ω jest zawarty w pewnym równoległościanie.
    - Przez **miarę zewnętrzną** zbioru Ω, ozn. $\overline{\mu_n(\Omega)}$, określamy infimum po wszystkich sumach skończonych $\mu_n(P_1) + \ldots + \mu_n(P_s)$, gdzie $P_1, \ldots, P_s$ są równoległościanami (jak w poprzednich krokach) takimi, że $\Omega \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$.
    - Przez **miarę wewnętrzną** zbioru Ω, ozn. $\underline{\mu_n(\Omega)}$, określamy supremum po wszystkich sumach skończonych $\mu_n(Q_1) + \ldots + \mu_n(Q_r)$, gdzie $Q_1, \ldots, Q_r$ są równoległościanami (jak w poprzednich krokach) takimi, że: $\Omega \supseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$.



Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

- **Krok 3.** Mówimy, że zbiór ograniczony $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest **mierzalny w sensie Jordana**, jeśli

$$\overline{\mu_n(\Omega)} = \underline{\mu_n(\Omega)}.$$

Liczbę powyżej nazywamy **miarą Jordana** zbioru Ω, ozn. $\mu_n(\Omega)$.

Mówiąc równoważnie: ograniczony zbiór $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Jordana jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją równoległościany $P_1, \ldots, P_m$ oraz $R_1, \ldots, R_n$ o rozłącznych wnętrzach rozpięte przez skalarne wielokrotności wektorów z bazy $\mathcal{A}$, że

$$P_1 \cup \ldots \cup P_r \subseteq \Omega \subseteq R_1 \cup \ldots \cup R_s$$

oraz

$$0 \leq \sum_{j=1}^{s} \mu_n(R_j) - \sum_{i=1}^{r} \mu_n(P_i) < \epsilon.$$

- **Krok 3.** Mówimy, że zbiór ograniczony $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest **mierzalny w sensie Jordana**, jeśli
$$\overline{\mu_n(\Omega)} = \underline{\mu_n(\Omega)}.$$
Liczbę powyżej nazywamy **miarą Jordana** zbioru Ω, ozn. $\mu_n(\Omega)$.

Mówiąc równoważnie: ograniczony zbiór $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Jordana jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją równoległościany $P_1, \ldots, P_m$ oraz $R_1, \ldots, R_n$ o rozłącznych wnętrzach rozpięte przez skalarne wielokrotności wektorów z bazy $\mathcal{A}$, że $P_1 \cup \ldots \cup P_r \subseteq \Omega \subseteq R_1 \cup \ldots \cup R_s$ oraz
$$0 \leq \sum_{j=1}^{s} \mu_n(R_j) - \sum_{i=1}^{r} \mu_n(P_i) < \epsilon.$$

Ważne własności.

  - Suma skończenie wielu mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ w sensie Jordana jest mierzalna w sensie Jordana, ale suma nieskończenie wielu – już niekoniecznie.
  - Można pokazać, że dla zbiorów mierzalnych $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ mamy $\mu_n(\Omega_1) \leq \mu_n(\Omega_2)$.

Uogólnienia naszych rezultatów.

- Niech $\phi : V \to W$ będzie odwzorowaniem afinicznym pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi. Niech $\Omega \subseteq V$ będzie mierzalny w sensie Jordana. Wówczas $\phi(\Omega)$ jest mierzalny w sensie Jordana i mamy:

$$\mu_{\dim W}(\phi(\Omega)) = |\det(\phi')| \cdot \mu_{\dim V}(\Omega).$$

Uogólnienia naszych rezultatów.

- Niech $\phi : V \to W$ będzie odwzorowaniem afinicznym pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi. Niech $\Omega \subseteq V$ będzie mierzalny w sensie Jordana. Wówczas $\phi(\Omega)$ jest mierzalny w sensie Jordana i mamy:

$$\mu_{\dim W}(\phi(\Omega)) = |\det(\phi')| \cdot \mu_{\dim V}(\Omega).$$

- Na Analizie II poznają Państwo odwzorowania $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywane **dyfeomorfizmami**: są to bijekcje takie, że ϕ oraz ϕ^{-1} są różniczkowane.

  Jak się okaże, dla dla zbioru Ω mierzalnego w sensie Jordana (a w zasadzie wtedy już ogólniej: w sensie Lebesgue'a) oraz dyfeomorfizmu ϕ sens będzie miało całkowanie tak, że:

$$\mu_n(\phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det \phi'(x)| d\mu_n(x).$$

  Oczywiście na razie nie ma sensu tego komentować, ale całkujemy względem miary μ_n, a ϕ' to pewne odwzorowanie liniowe.

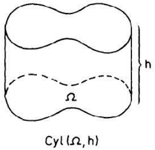
Uogólnienia naszych rezultatów.

- **Twierdzenie.** Niech $U \subseteq (\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle_{st})$ będzie hiperpłaszczyzną oraz niech $v \in U^{\perp}$, gdzie $\|v\| = 1$. Niech μ_n oraz μ_{n-1} będą miarami Jordana na $\mathbb{R}^n$ oraz na U. Dla dowolnego podzbioru $\Omega \subseteq U$ mierzalnego w sensie Jordana oraz dodatniej liczby $h > 0$ określamy **cylinder nad** Ω **wysokości** h jako zbiór:

$$Cyl(\Omega, h) := \{x + tv \mid x \in \Omega, 0 \leq t \leq h\}.$$

Wówczas:

$$\mu_n(Cyl(\Omega, h)) = h \cdot \mu_{n-1}(\Omega).$$

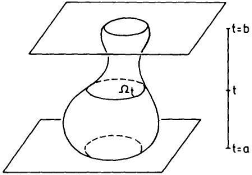


Cylinder. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Twierdzenie (Zasada Cavalieriego)

Niech Ω będzie mierzalnym (w s. J.) podzbiorem $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$, niech U będzie hiperpłaszczyzną i niech $n_0 \in U^{\perp}$ ma długość 1. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ niech

$$\Omega_t := \Omega \cap (tn_0 + U).$$



Ilustracja zbiorów Ω_t. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Jeśli Ω_t jest mierzalny (w s. J.) dla $a \leq t \leq b$ oraz pusty dla pozostałych t, to:

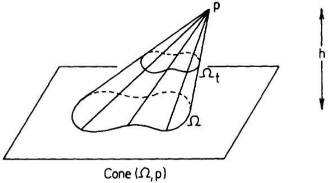
$$\mu_n(\Omega) = \int_a^b \mu_{n-1}(\Omega_t)dt.$$

Wniosek

Niech U będzie hiperpłaszczyzną w $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ i niech Ω będzie mierzalnym (w s. J) podzbiorem U. Dla każdego elementu $p \in V \setminus U$ przez **stożek nad** Ω określamy zbiór:

$$Cone(\Omega, p) := \{(1-t)x + tp \,|\, x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\},$$

czyli jest to suma wszystkich odcinków łączących elementy Ω z p.



Ilustracja zbiorów $Cone(\Omega, p)$. Źródło: K. Spindler Abstract Algebra With Applications, Vol 1., Chapmann & Hall.

Jeśli h jest odległością p od U, to $\mu_n(Cone(\Omega, p)) = \frac{h}{n}\mu_{n-1}(\Omega)$.

Wniosek (pokażemy następnym razem)

Niech $p_0, \ldots, p_n$ należą do przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st})$ i niech S będzie sympleksem rozpiętym na tych punktach. Niech też $\alpha_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$, dla $0 \leq i, j \leq n$. Wówczas:

$$\mu_n(S)^2 = \frac{1}{n!^2} W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n!^2} \begin{vmatrix} | & | & & | \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^n (n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{10}^2 & 0 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(współrzędne punktów $p_0, \ldots, p_n$ są w dowolnym układzie bazowym w $\mathbb{R}^n$).