Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 2, 04.03.2021 r.

Przypomnienie

Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Następujące warunki są równoważne:

- istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna,
- macierz $M(\phi)_{st}^{st}$ jest podobna nad K do macierzy diagonalnej,
- istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych ϕ.

Przykłady endomorfizmów diagonalizowalnych nad każdym ciałem:

- identyczność,
- jednokładność,
- rzut,
- symetria.

Przypomnienie

Niech ϕ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Następujące warunki są równoważne:

- istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna,
- macierz $M(\phi)_{st}^{st}$ jest podobna nad K do macierzy diagonalnej,
- istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych ϕ.

Uwaga. Warunkiem koniecznym diagonalizowalności endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest to, aby wielomian charakterystyczny w_ϕ miał $|\dim V|$ pierwiastków w ciele K. Nie jest to warunek wystarczający, patrz np.

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przypomnienie przykładu. Dla $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ danego wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

mamy:

$$w_\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2.$$

Stąd

- wartościami własnymi ϕ są -1 oraz 5,
- po rozwiązaniu układów o macierzach $M(\phi)_{st}^{st} + I$ oraz $M(\phi)_{st}^{st} - 5I$ mamy:

$$V_{(-1)} = \mathrm{lin}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)), \quad V_{(5)} = \mathrm{lin}((1, 1, 1)).$$

- endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny, bo w bazie $\mathcal{A} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ mamy:

$$M(\phi)_\mathcal{A}^\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$.

Uwaga

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$.

Dowód. Stosujemy indukcję po k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Skoro $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, to stosując ϕ do obydwu stron tej równości dostajemy

$$0 = \phi(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = \phi(\beta_1) + \ldots + \phi(\beta_k) = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k.$$

Uwaga

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$.

Dowód. Stosujemy indukcję po k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Skoro $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, to stosując ϕ do obydwu stron tej równości dostajemy

$$0 = \phi(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = \phi(\beta_1) + \ldots + \phi(\beta_k) = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k.$$

Mamy też $a_1(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = 0$, a zatem

$$a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \ldots + a_1\beta_k = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k,$$

czyli po uproszczeniu $(a_2 - a_1)\beta_2 + \ldots + (a_k - a_1)\beta_k = 0$.

Uwaga

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$.

Dowód. Stosujemy indukcję po k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Skoro $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, to stosując ϕ do obydwu stron tej równości dostajemy

$$0 = \phi(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = \phi(\beta_1) + \ldots + \phi(\beta_k) = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k.$$

Mamy też $a_1(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = 0$, a zatem

$$a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \ldots + a_1\beta_k = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k,$$

czyli po uproszczeniu $(a_2 - a_1)\beta_2 + \ldots + (a_k - a_1)\beta_k = 0$. Skoro $(a_i - a_1)\beta_i \in V_{(a_i)}$, to założenia indukcyjnego:

$$(a_2 - a_1)\beta_2 = (a_3 - a_1)\beta_3 = \ldots = (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Uwaga

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0 \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$.

Dowód. Stosujemy indukcję po k. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Skoro $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$, to stosując ϕ do obydwu stron tej równości dostajemy

$$0 = \phi(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = \phi(\beta_1) + \ldots + \phi(\beta_k) = a_1\beta_1 + \ldots + a_k\beta_k.$$

Mamy też $a_1(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = 0$, a zatem

$$a_1\beta_1 + a_1\beta_2 + \ldots + a_1\beta_k = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k,$$

czyli po uproszczeniu $(a_2 - a_1)\beta_2 + \ldots + (a_k - a_1)\beta_k = 0$. Skoro $(a_i - a_1)\beta_i \in V_{(a_i)}$, to założenia indukcyjnego:

$$(a_2 - a_1)\beta_2 = (a_3 - a_1)\beta_3 = \ldots = (a_k - a_1)\beta_k = 0.$$

Skoro $a_1, \ldots, a_k$ są parami różne, to mamy $\beta_2, \ldots, \beta_k = 0$. A zatem równość $\beta_1 + \ldots + \beta_k = 0$ redukuje się do $\beta_1 = 0$, co kończy krok indukcyjny i cały dowód.

Wniosek

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi ϕ o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ (odpowiednio). Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Wniosek

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi ϕ o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ (odpowiednio). Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Przypuśćmy, że $b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $b_1, \ldots, b_k \in K$. Oczywiście $b_i\alpha_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Wniosek

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi ϕ o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ (odpowiednio). Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Przypuśćmy, że $b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $b_1, \ldots, b_k \in K$. Oczywiście $b_i\alpha_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Na mocy poprzedniej uwagi mamy zatem, ze $b_i\alpha_i = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Skoro wektory własne α_i są z definicji niezerowe, to mamy $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$.

Wniosek

Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi : V \to V$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi ϕ o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$ (odpowiednio). Wówczas układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

Dowód. Przypuśćmy, że $b_1\alpha_1 + \ldots + b_k\alpha_k = 0$, dla pewnych $b_1, \ldots, b_k \in K$. Oczywiście $b_i\alpha_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Na mocy poprzedniej uwagi mamy zatem, ze $b_i\alpha_i = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Skoro wektory własne α_i są z definicji niezerowe, to mamy $b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$.

Wniosek

Jeśli endomorfizm n wymiarowej przestrzeni liniowej ma n różnych wartości własnych, to jest on diagonalizowalny.

Lemat, który wkrótce uogólnimy

Niech $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu $w_\phi(\lambda)$, czyli taką liczbą, że

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas $k \geq \dim V_{(a)}$.

Lemat, który wkrótce uogólnimy

Niech $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu $w_\phi(\lambda)$, czyli taką liczbą, że

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas $k \geq \dim V_{(a)}$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$. Uzupełnijmy ją wektorami $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V.

Lemat, który wkrótce uogólnimy

Niech $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu $w_\phi(\lambda)$, czyli taką liczbą, że

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas $k \geq \dim V_{(a)}$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$. Uzupełnijmy ją wektorami $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wówczas macierz ϕ w bazie $\mathcal{A}$ ma postać blokową:

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} aI_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dla pewnych $B \in M_{r\times(n-r)}(K)$, $C \in M_{n-r}(K)$.

Lemat, który wkrótce uogólnimy

Niech $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu $w_\phi(\lambda)$, czyli taką liczbą, że

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas $k \geq \dim V_{(a)}$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$. Uzupełnijmy ją wektorami $\beta_{r+1}, \dots, \beta_n$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wówczas macierz ϕ w bazie $\mathcal{A}$ ma postać blokową:

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} aI_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dla pewnych $B \in M_{r\times(n-r)}(K)$, $C \in M_{n-r}(K)$. Zatem:

$$w_\phi = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)^r \cdot \det(C - \lambda I).$$

Lemat, który wkrótce uogólnimy

Niech $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz niech k będzie krotnością pierwiastka a wielomianu $w_\phi(\lambda)$, czyli taką liczbą, że

$$w_\phi(\lambda) = (\lambda - a)^k \cdot g(\lambda),$$

przy czym element a nie jest pierwiastkiem wielomianu g. Wówczas $k \geq \dim V_{(a)}$.

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$. Uzupełnijmy ją wektorami $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V. Wówczas macierz ϕ w bazie $\mathcal{A}$ ma postać blokową:

$$A = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} aI_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

dla pewnych $B \in M_{r\times(n-r)}(K)$, $C \in M_{n-r}(K)$. Zatem:

$$w_\phi = \det(A - \lambda I) = (a-\lambda)^r \cdot \det(C - \lambda I).$$

Z definicji krotności (i z jednoznaczności rozkładu w $K[\lambda]$, którą naszkicujemy następnym razem dowodząc uogólnienie tego faktu) mamy $k \geq r = \dim V_{(a)}$.

Definicja

Niech a będzie wartością własną endomorfizmu ϕ. Liczbę k występującą w poprzednim lemacie nazywamy **krotnością algebraiczną** wartości własnej a. Liczbę $\dim V_{(a)}$ nazywamy **krotnością geometryczną wartości** własnej a.

Definicja

Niech a będzie wartością własną endomorfizmu ϕ. Liczbę k występującą w poprzednim lemacie nazywamy **krotnością algebraiczną** wartości własnej a. Liczbę $\dim V_{(a)}$ nazywamy **krotnością geometryczną wartości** własnej a.

Dla $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zadanego macierzą $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mamy $w_\phi(\lambda) = (1 - \lambda^2)$, czyli ϕ ma jedną wartość własną $\lambda = 1$ o krotności algebraicznej 2 oraz krotności geometrycznej 1, ponieważ $V_{(1)}$ jest jądrem $\phi - \mathrm{id}$ o macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech a będzie wartością własną endomorfizmu ϕ. Liczbę k występującą w poprzednim lemacie nazywamy **krotnością algebraiczną** wartości własnej a. Liczbę $\dim V_{(a)}$ nazywamy **krotnością geometryczną wartości** własnej a.

Dla $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zadanego macierzą $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mamy $w_\phi(\lambda) = (1 - \lambda^2)$, czyli ϕ ma jedną wartość własną $\lambda = 1$ o krotności algebraicznej 2 oraz krotności geometrycznej 1, ponieważ $V_{(1)}$ jest jądrem $\phi - \mathrm{id}$ o macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wniosek

Dla endomorfizmu ϕ przestrzeni skończenie wymiarowej V oraz dowolnej jego wartości własnej a, krotność algebraiczna tej wartości własnej jest nie mniejsza niż jej krotność geometryczna.

Twierdzenie

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$, gdzie V – skończenie wymiarowa nad K. Niech $a_1, \ldots, a_k \in K$ będą wszystkimi parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu ϕ. Następujące warunki są równoważne:

(a) ϕ jest diagonalizowalny,

(b) $V_{(a_1)} \oplus V_{(a_2)} \oplus \ldots \oplus V_{(a_k)} = V$,

(c) $\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$.

Wówczas oczywiście

$$w_\phi(\lambda) = (-1)^{\dim V} \cdot (\lambda - a_1)^{\dim V_{(a_1)}} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_k)^{\dim V_{(a_k)}},$$

czyli krotności: algebraiczna i geometryczna każdej wartości własnej a_i są równe.

Przypomnienie

Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $V_1, \ldots, V_n$ jej podprzestrzeniami. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- dla każdego $\alpha \in V$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory $\alpha_1 \in V_1, \ldots, \alpha_n \in V_n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
- $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$ oraz dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$.

Mówimy wówczas, że V jest sumą prostą przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$, ozn.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i. \qquad (*)$$

Oczywiście jeśli V ma skończony wymiar i zachodzi $(*)$, to:

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \ldots + \dim V_n.$$

Dowód:

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (c) jest oczywista. Dowodzimy (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Dla $i = 1, \ldots, k$ niech układ $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależny w $V_{(a_i)}$.

Dowód:

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (c) jest oczywista. Dowodzimy (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Dla $i = 1, \ldots, k$ niech układ $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależny w $V_{(a_i)}$.
- Pokażemy, że (zawsze) $V_{(a_i)} \cap \sum_{j \neq i} V_{(a_j)} = \{0\}$. Przypuśćmy, że

$$\underbrace{(a_{11}\alpha_{11} + \ldots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1})}_{\in V_{(a_1)}} + \ldots + \underbrace{(a_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{km_k}\alpha_{km_k})}_{\in V_{(a_k)}} = 0,$$

dla pewnych $a_{11}, \ldots, a_{km_k} \in K$.

Dowód:

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (c) jest oczywista. Dowodzimy (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Dla $i = 1, \ldots, k$ niech układ $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależny w $V_{(a_i)}$.
- Pokażemy, że (zawsze) $V_{(a_i)} \cap \sum_{j \neq i} V_{(a_j)} = \{0\}$. Przypuśćmy, że

$$\underbrace{(a_{11}\alpha_{11} + \ldots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1})}_{\in V_{(a_1)}} + \ldots + \underbrace{(a_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{km_k}\alpha_{km_k})}_{\in V_{(a_k)}} = 0,$$

  dla pewnych $a_{11}, \ldots, a_{km_k} \in K$.
- Z wcześniejszego lematu mamy $a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{im_i}\alpha_{im_i} = 0$, dla wszystkich i. Wobec liniowej niezależności każdego z tych układów: $a_{i1}, \ldots, a_{im_i} = 0$.

Dowód:

- Implikacja (b) $\Rightarrow$ (c) jest oczywista. Dowodzimy (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Dla $i = 1, \ldots, k$ niech układ $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im_i}$ będzie liniowo niezależny w $V_{(a_i)}$.
- Pokażemy, że (zawsze) $V_{(a_i)} \cap \sum_{j \neq i} V_{(a_j)} = \{0\}$. Przypuśćmy, że
$$\underbrace{(a_{11}\alpha_{11} + \ldots + a_{1m_1}\alpha_{1m_1})}_{\in V_{(a_1)}} + \ldots + \underbrace{(a_{k1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{km_k}\alpha_{km_k})}_{\in V_{(a_k)}} = 0,$$
dla pewnych $a_{11}, \ldots, a_{km_k} \in K$.
- Z wcześniejszego lematu mamy $a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{im_i}\alpha_{im_i} = 0$, dla wszystkich i. Wobec liniowej niezależności każdego z tych układów: $a_{i1}, \ldots, a_{im_i} = 0$.
- Mamy więc $V_{(a_i)} \cap \sum_{j \neq i} V_{(a_j)} = \{0\}$. Skoro $\dim V_{(a_1)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$, to układ złożony z baz przestrzeni $V_{(a_i)}$ jest bazą V, złożoną z wektorów własnych. Czyli $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, dając (b), oraz ϕ jest diagonalizowalny, czyli (c).

Dowód cd.

- Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (c).

Dowód cd.

- Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (c).
- Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, mającego wartości własne $a_1, \ldots, a_k$.

Dowód cd.

- Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (c).
- Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, mającego wartości własne $a_1, \ldots, a_k$.
- Dla każdego $i = 1, \ldots, k$ niech $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ będą wszystkimi tymi spośród wektorów bazy $\mathcal{A}$, które należą do $V_{(a_i)}$.

Dowód cd.

- Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (c).
- Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, mającego wartości własne $a_1, \ldots, a_k$.
- Dla każdego $i = 1, \ldots, k$ niech $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ będą wszystkimi tymi spośród wektorów bazy $\mathcal{A}$, które należą do $V_{(a_i)}$.
- Wówczas $n_1 + \ldots + n_k = \dim V$. Ponadto wówczas dla każdego i układ $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ jest liniowo niezależny, więc $n_i \leq \dim V_{(a_i)}$.

Dowód cd.

- Dowodzimy (a) $\Rightarrow$ (c).
- Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni V złożonej z wektorów własnych endomorfizmu ϕ, mającego wartości własne $a_1, \ldots, a_k$.
- Dla każdego $i = 1, \ldots, k$ niech $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ będą wszystkimi tymi spośród wektorów bazy $\mathcal{A}$, które należą do $V_{(a_i)}$.
- Wówczas $n_1 + \ldots + n_k = \dim V$. Ponadto wówczas dla każdego i układ $\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in_i}$ jest liniowo niezależny, więc $n_i \leq \dim V_{(a_i)}$.
- Zatem $\dim V = n_1 + \ldots + n_k \leq \dim V_{(a_1)} + \ldots + \dim V_{(a_r)}$. Ale z (a) wynika, że $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe, czyli suma krotności algebraicznych wartości własnych $a_1, \ldots, a_r$ to $\dim V$. Zatem z porównania krotności algebraicznej i geometrycznej (lemat) oraz nierówności wyżej wynika równość

$$\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V.$$

Przykłady zastosowań. Potęgi macierzy diagonalizowalnych.

Niech $A = C^{-1}DC$, gdzie D jest macierzą diagonalną oraz C – macierzą odwracalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} A^n &= (C^{-1}DC)^n = \\ &= C^{-1}D{\color{red}CC^{-1}}D{\color{red}CC^{-1}}\dots{\color{red}CC^{-1}}DC = \\ &= C^{-1}D^nC, \end{aligned}$$

przy tym D^n to macierz diagonalna mająca na przekątnej n-te potęgi odpowiednich elementów z przekątnej D.

Przykłady zastosowań. Potęgi macierzy diagonalizowalnych.

Niech $A = C^{-1}DC$, gdzie D jest macierzą diagonalną oraz C – macierzą odwracalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} A^n &= (C^{-1}DC)^n = \\ &= C^{-1}D{\color{red}CC^{-1}}D{\color{red}CC^{-1}}\dots{\color{red}CC^{-1}}DC = \\ &= C^{-1}D^nC, \end{aligned}$$

przy tym D^n to macierz diagonalna mająca na przekątnej n-te potęgi odpowiednich elementów z przekątnej D.

* * *

Uwaga. W języku endomorfizmu: jeśli $M(\phi)_{st}^{st} = A$ oraz $\mathcal{A}$ jest bazą K^n złożoną z wektorów własnych taką, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = D$, to $C^{-1} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$.

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$.

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Wówczas:

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Wówczas:

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem:

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1).$$

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Wówczas:

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem:

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1).$$

Mamy

$$w_\phi = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Wówczas:

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem:

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1).$$

Wartościami własnymi ϕ są

- $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o wektorze własnym $\alpha_+ = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,
- $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o wektorze własnym $\alpha_- = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Przy tym $(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+ - \alpha_-)$.

Przykłady zastosowań. Wyznaczenie wzoru na ciąg Fibonacciego.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$$

Weźmy $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany wzorem $\phi(x, y) = (y, x + y)$. Wówczas:

$$\phi(F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n+1}).$$

Zatem:

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(F_0, F_1) = \phi^n(0, 1).$$

Wartościami własnymi ϕ są

- $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o wektorze własnym $\alpha_+ = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,
- $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o wektorze własnym $\alpha_- = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

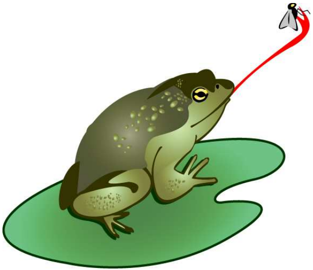
Przy tym $(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+ - \alpha_-)$. Stąd:

$$(F_n, F_{n+1}) = \phi^n(0, 1) = \phi^n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_+ - \alpha_-)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \alpha_+ - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \alpha_-\right)$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Wyobraźmy sobie ekosystem złożony z:

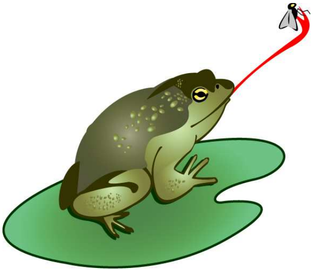
- m_n miliardów much,
- z_n milionów żab.



Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym[1]) modelem liniowym:

- $m_{n+1} = -0,36 z_n + 1,22 m_n,$
- $z_{n+1} = 0,38 z_n + 0,24 m_n.$



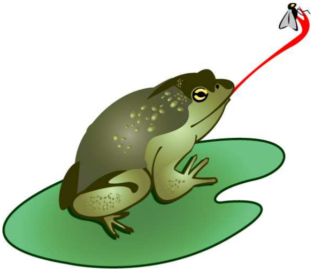
1. Źródło: `http://www.math.ubc.ca/~behrend/math223/DynSys.pdf`, str. 28-39.

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym[1]) modelem liniowym:

- $m_{n+1} = -0,36 z_n + 1,22 m_n,$
- $z_{n+1} = \quad 0,38 z_n + 0,24 m_n.$

Jaka jest dynamika tego ekosystemu w zależności od wyboru z_0, m_0?



1. Źródło: `http://www.math.ubc.ca/~behrend/math223/DynSys.pdf`, str. 28-39.

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym) modelem liniowym:

- $m_{n+1} = -0,36 z_n + 1,22 m_n$,
- $z_{n+1} = \quad 0,38 z_n + 0,24 m_n$.

Jaka jest dynamika tego ekosystemu w zależności od wyboru z_0, m_0?

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym) modelem liniowym:

- $m_{n+1} = -0,36 z_n + 1,22 m_n$,
- $z_{n+1} \ = \ \ 0,38 z_n + 0,24 m_n$.

Jaka jest dynamika tego ekosystemu w zależności od wyboru z_0, m_0?

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma macierz $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}$.

Podprzestrzenie własne tego endomorfizmu to $V_{(1,1)} = \mathrm{lin}(1,3)$, $V_{(0,5)} = \mathrm{lin}(2,1)$.

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Po roku liczba much/żab zmienia się zgodnie z (nierealnym) modelem liniowym:

- $m_{n+1} = -0,36 z_n + 1,22 m_n,$
- $z_{n+1} = \quad 0,38 z_n + 0,24 m_n.$

Jaka jest dynamika tego ekosystemu w zależności od wyboru z_0, m_0?

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma macierz $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}$.

Podprzestrzenie własne tego endomorfizmu to $V_{(1,1)} = \text{lin}(1,3)$, $V_{(0,5)} = \text{lin}(2,1)$.
Niech $\mathcal{A} = ((1,3),(2,1))$. Mamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Wzór na z_{n+1}, m_{n+1} będzie bardzo nieczytelny. Dlatego przepisujemy równanie:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

w bazie $\mathcal{A}$, przyjmując:

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Wzór na z_{n+1}, m_{n+1} będzie bardzo nieczytelny. Dlatego przepisujemy równanie:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

w bazie $\mathcal{A}$, przyjmując:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = c_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = c_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Wzór na z_{n+1}, m_{n+1} będzie bardzo nieczytelny. Dlatego przepisujemy równanie:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

w bazie $\mathcal{A}$, przyjmując:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = c_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = c_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

skąd dostajemy:

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,1)^n c_0 \\ (0,5)^n d_0 \end{bmatrix}.$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

Wzór na z_{n+1}, m_{n+1} będzie bardzo nieczytelny. Dlatego przepisujemy równanie:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,24 \\ -0,36 & 1,22 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix}.$$

w bazie $\mathcal{A}$, przyjmując:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = c_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ m_{n+1} \end{bmatrix} = c_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + d_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

skąd dostajemy:

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,1)^n c_0 \\ (0,5)^n d_0 \end{bmatrix}.$$

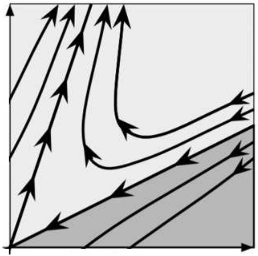
Zatem:

$$\begin{cases} z_{n+1} & = 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} & = 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

$$\begin{cases} z_{n+1} &= 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} &= 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

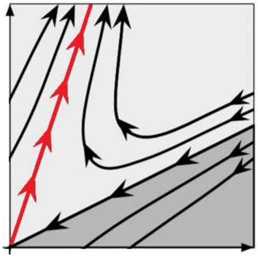
Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0:



Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

$$\begin{cases} z_{n+1} & = 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} & = 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0:

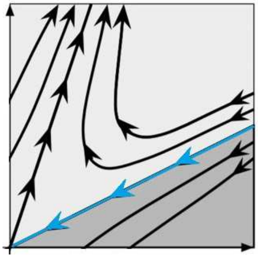


$c_0 = 1$, $d_0 = 0$, czyli $(z_0, m_0) = (1,3)$ oraz $(z_{n+1}, m_{n+1}) = ((1,1)^n, 3 \cdot (1,1)^n)$.
Populacje rosną w tym samym tempie: stosunek much do żab się nie zmienia!

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

$$\begin{cases} z_{n+1} & = 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} & = 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0:

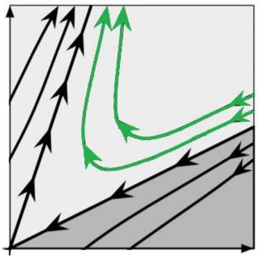


$c_0 = 0$, $d_0 = 1$, czyli $(z_0, m_0) = (2, 1)$ oraz $(z_{n+1}, m_{n+1}) = (2 \cdot (0,5)^n, (0,5)^n)$.
Populacje maleją w tym samym tempie: stosunek much do żab się nie zmienia!

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

$$\begin{cases} z_{n+1} & = 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} & = 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0:



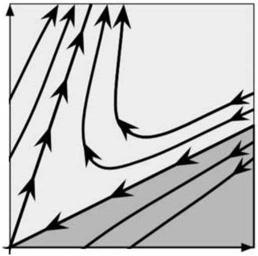
$c_0 > 0, d_0 > 0$

Populacje być może pewien czas maleją, potem przyrastają. Stosunek żab do much zmierza *asymptotycznie* do $1:3$ (oczywiście w istocie: $1:3000$)

Przykłady zastosowań. Dyskretny układ dynamiczny.

$$\begin{cases} z_{n+1} & = 1 \cdot (1,1)^n c_0 + 2 \cdot (0,5)^n d_0 \\ m_{n+1} & = 3 \cdot (1,1)^n c_0 + 1 \cdot (0,5)^n d_0 \end{cases}.$$

Interpretacja graficzna uzyskanego wyniku w zależności od wyboru c_0, d_0:



$c_0 \leq 0, d_0$ – dowolne sensowne.
Populacje skazane są na zagładę.

Definicja

Endomorfizm $\phi \in \mathtt{End}(V)$ przestrzeni V nad ciałem K, dla którego istnieje baza $\mathcal{A}$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna nazywamy **triangularyzowalnym** nad K.

Definicja

Endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ przestrzeni V nad ciałem K, dla którego istnieje baza $\mathcal{A}$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna nazywamy **triangularyzowalnym** nad K.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe,

(2) istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna.

Definicja

Endomorfizm $\phi \in \mathrm{End}(V)$ przestrzeni V nad ciałem K, dla którego istnieje baza $\mathcal{A}$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna nazywamy **triangularyzowalnym** nad K.

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem K oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) $w_\phi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe,

(2) istnieje baza $\mathcal{A}$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest górnotrójkątna.

Idea. Endomorfizm ϕ przestrzeni n wymiarowej V nad ciałem K nie jest diagonalizowalny jeśli $w_\phi(\lambda) \in K[\lambda]$ ma mniej niż n pierwiastków w K. Gdy $w_\phi(\lambda)$ ma n pierwiastków, to ϕ nie musi być nadal diagonalizowalny, ale jest zawsze triangularyzowalny. Gdy K jest algebraicznie domknięte każdy $w \in K[\lambda]$ rozkłada się na czynniki liniowe, więc wtedy każdy endomorfizm V jest triangularyzowalny.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
- Wówczas w bazie $\mathcal{A}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

gdzie $B = M(\psi)_{st}^{st} \in M_{n-1}(K)$, dla pewnego $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
- Wówczas w bazie $\mathcal{A}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

  gdzie $B = M(\psi)_{st}^{st} \in M_{n-1}(K)$, dla pewnego $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$.
- Mamy $w_\phi(\lambda) = (c - \lambda) \cdot w_\psi(\lambda)$, czyli $w_\psi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
- Wówczas w bazie $\mathcal{A}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać:
$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
gdzie $B = M(\psi)_{st}^{st} \in M_{n-1}(K)$, dla pewnego $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$.
- Mamy $w_\phi(\lambda) = (c - \lambda) \cdot w_\psi(\lambda)$, czyli $w_\psi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe.
- Z zał. indukcyjnego ψ jest triangularyzowalne, czyli $B' = S^{-1}BS$, dla pewnej macierzy górnotrójkątnej B' oraz macierzy odwracalnej S.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
- Wówczas w bazie $\mathcal{A}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

  gdzie $B = M(\psi)_{st}^{st} \in M_{n-1}(K)$, dla pewnego $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$.
- Mamy $w_\phi(\lambda) = (c - \lambda) \cdot w_\psi(\lambda)$, czyli $w_\psi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe.
- Z zał. indukcyjnego ψ jest triangularyzowalne, czyli $B' = S^{-1}BS$, dla pewnej macierzy górnotrójkątnej B' oraz macierzy odwracalnej S.
- Wówczas mamy (sprytny) iloczyn macierzy blokowych postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B' \end{bmatrix}.$$

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2) przez indukcję ze względu na wymiar $n = \dim V$.

- ϕ ma wartość własną c, dla pewnego wektora własnego $\alpha \neq 0$.
- Dopełnijmy wektor α do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V wektorami $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.
- Wówczas w bazie $\mathcal{A}$ macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

gdzie $B = M(\psi)_{st}^{st} \in M_{n-1}(K)$, dla pewnego $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{lin}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$.
- Mamy $w_\phi(\lambda) = (c - \lambda) \cdot w_\psi(\lambda)$, czyli $w_\psi(\lambda)$ rozkłada się na czynniki liniowe.
- Z zał. indukcyjnego ψ jest triangularyzowalne, czyli $B' = S^{-1}BS$, dla pewnej macierzy górnotrójkątnej B' oraz macierzy odwracalnej S.
- Wówczas mamy (sprytny) iloczyn macierzy blokowych postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & A \\ 0 & B' \end{bmatrix}.$$

- Zatem ϕ jest triangularyzowalne. Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1) jest oczywista.

Najważniejsza definicja w tym semestrze

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Podprzestrzeń $U \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią niezmienniczą** względem ϕ, albo po prostu **ϕ-niezmienniczą**, jeśli

$$\phi(U) \subseteq U.$$

Najważniejsza definicja w tym semestrze

Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Podprzestrzeń $U \subseteq V$ nazywamy **podprzestrzenią niezmienniczą** względem ϕ, albo po prostu **ϕ-niezmienniczą**, jeśli

$$\phi(U) \subseteq U.$$

Przykłady:

- podprzestrzenie 0, V są ϕ-niezmiennicze, dla każdego $\phi \in \mathrm{End}(V)$,
- $\mathrm{lin}(\alpha)$ jest ϕ-niezmiennicza wtw gdy a jest wektorem własnym ϕ,
- $\ker(\phi)$ oraz $\mathrm{im}(\phi)$ są ϕ-niezmiennicze,
- podprzestrzenie $V_{(a)}$ są ϕ-niezmiennicze, gdzie a - wartość własna ϕ,
- (ćwiczenie) jeśli $w \in K[x]$, to $\ker w(\phi)$ oraz $\mathrm{im}\, w(\phi)$ są ϕ-niezmiennicze.

Uwaga

Niech V – skończenie wymiarowa nad K. Jeśli U jest podprzestrzenią ϕ-niezmienniczą w V oraz baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V składa się najpierw z wektorów bazowych U, to macierz ϕ ma w tej bazie postać blokowo-górnotrójkątną:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A \in M_{\dim U}(K).$$

Jeśli $\phi|_U : U \to U$ jest **obcięciem** ϕ do U (z definicji $\phi|_U(u) := \phi(u) \in U$, $\forall_{u \in U}$), to A jest macierzą $\phi|_U$, czyli $w_{\phi|_U}(\lambda)$ jest dzielnikiem $w_\phi(\lambda)$.

Uwaga

Niech V – skończenie wymiarowa nad K. Jeśli U jest podprzestrzenią ϕ-niezmienniczą w V oraz baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V składa się najpierw z wektorów bazowych U, to macierz ϕ ma w tej bazie postać blokowo-górnotrójkątną:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie } A \in M_{\dim U}(K).$$

Jeśli $\phi|_U : U \to U$ jest **obcięciem** ϕ do U (z definicji $\phi|_U(u) := \phi(u) \in U$, $\forall_{u \in U}$), to A jest macierzą $\phi|_U$, czyli $w_{\phi|_U}(\lambda)$ jest dzielnikiem $w_\phi(\lambda)$.

Nasze cele:

- szukać rozkładów V na sumy proste pewnych szczególnych podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych, jak to zrobiliśmy przy diagonalizowalności,
- zbadać wpływ rozkładalności na czynniki wielomianu $w_\phi(\lambda)$ na istnienie pewnych rozkładów na sumy proste podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych.