Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 19, 14.05.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V, nazywanej **przestrzenią styczną** oznaczaną jako $T(H)$, tzn. $H = p + T(H)$, dla każdego $p \in H$. Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami**.

Definicja oraz fakt

Niech V – przestrzeń liniowa nad K oraz niech $X \subseteq V$. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_n = 1$ **kombinacją afiniczną punktów** $p_0, \ldots, p_n$ **z wagami** $a_0, \ldots, a_n$ nazwiemy sumę

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n.$$

Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ t. że $\sum_i^k a_i = 1$ zachodzi:

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \iff \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

Fakt

Niech $q_0, \ldots, q_r$ będzie układem punktów w przestrzeni liniowej V, z których każdy jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$. Wówczas każda kombinacja afiniczna punktów $q_0, \ldots, q_r$ jest też kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$.

Twierdzenie

Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Następujące warunki są równoważne.

(i) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne,

(ii) H jest warstwą podprzestrzeni przestrzeni V,

(iii) H jest przestrzenią afiniczną.

Definicja

Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli $H_1 \subseteq H_2$, to mówimy, że H_1 jest **podprzestrzenią przestrzeni afinicznej** H_2.

Definicja

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ nazywamy **podprzestrzenią afiniczną rozpiętą na** $p_0, \ldots, p_k$, ozn. $\mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$.

Uwaga

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k})$.

Definicja

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie układem punktów przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.

- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie zależny** (albo, że jest **w położeniu szczególnym**), jeśli jeden z punktów tego układu jest kombinacją afiniczną pozostałych.
- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie niezależny** (albo, że jest **w położeniu ogólnym**), jeśli nie jest on w położeniu szczególnym.

Twierdzenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ leżą w przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

Definicja i fakt

Mówimy, że układ punktów $p_0, \ldots, p_k$ punktów przestrzeni afinicznej H jest **bazą punktową** przestrzeni H, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,
- $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, czyli układ $p_0, \ldots, p_k$ **rozpina** H.

Układ $p_0, \ldots, p_k$ jest baza punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest bazą przestrzeni $T(H)$. W szczególności każde dwie skończone bazy punktowe przestrzeni afinicznej są równoliczne. A zatem określić można **wymiar przestrzeni afinicznej** H, ozn. $\dim H$, jako $\dim T(H)$.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie bazą punktową przestrzeni H. **Współrzędnymi (barycentrycznymi) punktu** $p \in H$ **w bazie punktowej** $p_0, \ldots, p_k$ nazywamy układ wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ taki, że $p = a_0p_0 + \ldots + a_kp_k$.

Twierdzenie

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K i niech $\phi : T(H) \to T(M)$ będzie przekształceniem liniowym. Dla funkcji $f : H \to M$ następujące warunki są równoważne:

(1) istnieją punkty $p_0 \in H$, $q_0 \in M$ takie, że dla każdego punktu $p \in H$ zachodzi

$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}),$$

(2) dla każdego $p \in H$ i każdego $\alpha \in T(H)$:

$$f(p + \alpha) = f(p) + \phi(\alpha),$$

(3) dla każdych $p, p' \in H$ mamy:

$$\phi\left(\overrightarrow{pp'}\right) = \overrightarrow{f(p)f(p')}.$$

Dowód:

- (1) $\Rightarrow$ (2). Ustalmy $p_0 \in H$, $q_0 \in M$, takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Dla każdego $\alpha \in T(H)$ mamy $p + \alpha = p_0 + \overrightarrow{p_0 p} + \alpha$. Stąd $f(p+\alpha) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0 p} + \alpha) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p} + \alpha) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\alpha)$.

Dowód:

- (1) $\Rightarrow$ (2). Ustalmy $p_0 \in H$, $q_0 \in M$, takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Dla każdego $\alpha \in T(H)$ mamy $p + \alpha = p_0 + \overrightarrow{p_0 p} + \alpha$. Stąd $f(p+\alpha) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0 p} + \alpha) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p} + \alpha) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\alpha)$.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Dla każdych $p \in H$ i $\alpha \in T(H)$ mamy $f(p + \alpha) = f(p) + \phi(\alpha)$. Weźmy dowolne punkty $p, p' \in H$ i niech $\alpha = \overrightarrow{pp'}$. Wówczas $p' = p + \alpha$, więc:

$$f(p') = f(p + \alpha) = f(p) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\overrightarrow{pp'}).$$

Stąd $\phi(\overrightarrow{pp'}) = f(p') - f(p) = \overrightarrow{f(p)f(p')}$.

Dowód:

- (1) $\Rightarrow$ (2). Ustalmy $p_0 \in H$, $q_0 \in M$, takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p})$. Dla każdego $\alpha \in T(H)$ mamy $p + \alpha = p_0 + \overrightarrow{p_0p} + \alpha$. Stąd $f(p+\alpha) = f(p_0+\overrightarrow{p_0p}+\alpha) = q_0+\phi(\overrightarrow{p_0p}+\alpha) = q_0+\phi(\overrightarrow{p_0p})+\phi(\alpha) = f(p)+\phi(\alpha)$.
- (2) $\Rightarrow$ (3). Dla każdych $p \in H$ i $\alpha \in T(H)$ mamy $f(p + \alpha) = f(p) + \phi(\alpha)$. Weźmy dowolne punkty $p, p' \in H$ i niech $\alpha = \overrightarrow{pp'}$. Wówczas $p' = p + \alpha$, więc:
$$f(p') = f(p + \alpha) = f(p) + \phi(\alpha) = f(p) + \phi(\overrightarrow{pp'}).$$
Stąd $\phi(\overrightarrow{pp'}) = f(p') - f(p) = \overrightarrow{f(p)f(p')}$.
- (3) $\Rightarrow$ (1). Dla każdych $p, p' \in H$ mamy: $\phi\left(\overrightarrow{pp'}\right) = \overrightarrow{f(p)f(p')}$. Weźmy dowolny punkt $p_0 \in H$ i przyjmijmy $q_0 = f(p_0)$. Wówczas dla każdego $p \in H$ mamy $\phi(\overrightarrow{p_0p}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p)} = \overrightarrow{q_0f(p)}$, więc $f(p) = q_0 + \overrightarrow{q_0f(p)} = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0p})$.

Twierdzenie

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K. Wówczas dla funkcji $f : H \to M$ następujące warunki są równoważne:

(1) dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz układu wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ mamy:

$$f(a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k) = a_0 f(p_0) + \ldots + a_k f(p_k),$$

(2) istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy:

$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

Idea. Poprzedni wynik, jak się okazuje, daje nam charakteryzację przekształceń pomiędzy przestrzeniami afinicznymi, które zachowują kombinacje afiniczne punktów. Prowadzi to do definicji tzw. przekształceń afinicznych.

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Szukamy takiego $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz takich punktów $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$, by mieć $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Wybierzmy dowolny $p_0 \in H$ i określmy ϕ wzorem

$$\phi(\alpha) = \overrightarrow{f(p_0) f(p_0 + \alpha)} = f(p_0 + \alpha) - f(p_0).$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Szukamy takiego $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz takich punktów $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$, by mieć $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Wybierzmy dowolny $p_0 \in H$ i określmy ϕ wzorem
$$\phi(\alpha) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0 + \alpha)} = f(p_0 + \alpha) - f(p_0).$$
- Wykażemy, że ϕ jest liniowe. Niech $\alpha, \beta \in T(H)$. Wówczas $p_0 + \alpha + \beta$ jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, p_0 + \alpha, p_0 + \beta$ z wagami $-1, 1, 1$ postaci:
$$p_0 + \alpha + \beta = -p_0 + (p_0 + \alpha) + (p_0 + \beta).$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Szukamy takiego $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz takich punktów $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$, by mieć $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Wybierzmy dowolny $p_0 \in H$ i określmy ϕ wzorem

$$\phi(\alpha) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha)} = f(p_0+\alpha) - f(p_0).$$

- Wykażemy, że ϕ jest liniowe. Niech $\alpha, \beta \in T(H)$. Wówczas $p_0 + \alpha + \beta$ jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, p_0 + \alpha, p_0 + \beta$ z wagami $-1, 1, 1$ postaci:

$$p_0 + \alpha + \beta = -p_0 + (p_0 + \alpha) + (p_0 + \beta).$$

- Z warunku (1) dostajemy $f(p_0 + \alpha + \beta) = -f(p_0) + f(p_0 + \alpha) + f(p_0 + \beta)$.

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Szukamy takiego $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz takich punktów $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$, by mieć $f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p})$. Wybierzmy dowolny $p_0 \in H$ i określmy ϕ wzorem
$$\phi(\alpha) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha)} = f(p_0+\alpha) - f(p_0).$$
- Wykażemy, że ϕ jest liniowe. Niech $\alpha, \beta \in T(H)$. Wówczas $p_0 + \alpha + \beta$ jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, p_0 + \alpha, p_0 + \beta$ z wagami $-1, 1, 1$ postaci:
$$p_0 + \alpha + \beta = -p_0 + (p_0 + \alpha) + (p_0 + \beta).$$
- Z warunku (1) dostajemy $f(p_0 + \alpha + \beta) = -f(p_0) + f(p_0 + \alpha) + f(p_0 + \beta)$.
- A zatem z definicji ϕ mamy:
$$\begin{aligned}\phi(\alpha+\beta) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha+\beta)} = f(p_0+\alpha+\beta) - f(p_0) = \\ &= -f(p_0) + f(p_0+\alpha) + f(p_0+\beta) - f(p_0) = \\ &= f(p_0+\alpha) - f(p_0) + f(p_0+\beta) - f(p_0) = \\ &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\alpha)} + \overrightarrow{f(p_0)f(p_0+\beta)} = \phi(\alpha) + \phi(\beta)\end{aligned}$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Pozostaje pokazać, że $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$ oraz dla każdego $a \in K$.

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Pozostaje pokazać, że $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$ oraz dla każdego $a \in K$.
- Jednak również wektor $p_0 + a\alpha$ możemy przedstawić jako kombinację afiniczną postaci $p_0 + a\alpha = a(p_0 + \alpha) + (1 - a)p_0$, otrzymując stąd równość:

$$f(p_0 + a\alpha) = a \cdot f(p_0 + \alpha) + (1 - a) \cdot f(p_0).$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Pozostaje pokazać, że $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$ oraz dla każdego $a \in K$.
- Jednak również wektor $p_0 + a\alpha$ możemy przedstawić jako kombinację afiniczną postaci $p_0 + a\alpha = a(p_0 + \alpha) + (1 - a)p_0$, otrzymując stąd równość:

$$f(p_0 + a\alpha) = a \cdot f(p_0 + \alpha) + (1 - a) \cdot f(p_0).$$

- W rezultacie opierając się ponownie na definicji ϕ mamy:

$$\begin{aligned}
\phi(a\alpha) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0 + a\alpha)} = \\
&= f(p_0 + a\alpha) - f(p_0) = \\
&= a \cdot f(p_0 + \alpha) + (1 - a) \cdot f(p_0) - f(p_0) = \\
&= a(f(p_0 + \alpha) - f(p_0)) = \\
&= a\phi(\alpha).
\end{aligned}$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Pozostaje pokazać, że $\phi(a\alpha) = a\phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$ oraz dla każdego $a \in K$.
- Jednak również wektor $p_0 + a\alpha$ możemy przedstawić jako kombinację afiniczną postaci $p_0 + a\alpha = a(p_0 + \alpha) + (1 - a)p_0$, otrzymując stąd równość:

$$f(p_0 + a\alpha) \color{red}{=} a \cdot f(p_0 + \alpha) + (1 - a) \cdot f(p_0).$$

- W rezultacie opierając się ponownie na definicji ϕ mamy:

$$\begin{aligned}
\phi(a\alpha) &= \overrightarrow{f(p_0)f(p_0 + a\alpha)} = \\
&= f(p_0 + a\alpha) - f(p_0) = \\
&\color{red}{=} a \cdot f(p_0 + \alpha) + (1 - a) \cdot f(p_0) - f(p_0) = \\
&= a(f(p_0 + \alpha) - f(p_0)) = \\
&= a\phi(\alpha).
\end{aligned}$$

- Pokazaliśmy zatem, że ϕ jest liniowe.

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Określiliśmy $\phi : T(H) \to T(M)$ wzorem
$$\phi(\alpha) = f(p_0 + \alpha) - f(p_0).$$
Pokazaliśmy, że $\phi \in L(T(H), T(M))$ i pozostaje uzasadnić, że istnieją punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy:
$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Określiliśmy $\phi : T(H) \to T(M)$ wzorem
$$\phi(\alpha) = f(p_0 + \alpha) - f(p_0).$$
Pokazaliśmy, że $\phi \in L(T(H), T(M))$ i pozostaje uzasadnić, że istnieją punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy:
$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

- Ustalmy dowolne $p_0 \in H$. Z definicji ϕ mamy: $f(p_0 + \alpha) = f(p_0) + \phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$

Dowód: (1) $\Rightarrow$ (2). Zakładamy, że $f : H \to M$ zachowuje kombinacje afiniczne.

- Określiliśmy $\phi : T(H) \to T(M)$ wzorem
$$\phi(\alpha) = f(p_0 + \alpha) - f(p_0).$$
Pokazaliśmy, że $\phi \in L(T(H), T(M))$ i pozostaje uzasadnić, że istnieją punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy:
$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

- Ustalmy dowolne $p_0 \in H$. Z definicji ϕ mamy: $f(p_0 + \alpha) = f(p_0) + \phi(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in T(H)$

- Przyjmując więc $q_0 = f(p_0)$ dostajemy:
$$f(p) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0 p}) = f(p_0) + \phi(\overrightarrow{p_0 p}) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$
Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2) jest zakończony.

Dowód: (2) $\Rightarrow$ (1). Zakładamy, że dla funkcji $f : H \to M$ istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty oraz punkty $v \in H, z \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = z + \phi(\overrightarrow{vp})$ (w szczególności $f(v) = z$).

- Chcemy pokazać, że f zachowuje kombinacje afiniczne. Dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ i wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ (czyli $a_0 + \ldots + a_k = 1$) mamy:

  $$a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = v - (a_0 + \ldots + a_k)v + a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = v + a_0 \overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k \overrightarrow{vp_k},$$

Dowód: (2) $\Rightarrow$ (1). Zakładamy, że dla funkcji $f : H \to M$ istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty oraz punkty $v \in H, z \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy $f(p) = z + \phi(\overrightarrow{vp})$ (w szczególności $f(v) = z$).

- Chcemy pokazać, że f zachowuje kombinacje afiniczne. Dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ i wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ (czyli $a_0 + \ldots + a_k = 1$) mamy:

$$a_0p_0+\ldots+a_kp_k = v-(a_0+\ldots+a_k)v+a_0p_0+\ldots+a_kp_k = v+a_0\overrightarrow{vp_0}+\ldots+a_k\overrightarrow{vp_k},$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(a_0p_0 + \ldots + a_kp_k) &= f(v + a_0\overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{vp_k}) = \\ &\overset{Tw.\ 1(2)}{=} z + \phi(a_0\overrightarrow{vp_0} + \ldots + a_k\overrightarrow{vp_k}) = \\ &= z + a_0\phi(\overrightarrow{vp_0}) + \ldots + a_k\phi(\overrightarrow{vp_k}) = \\ &\overset{Tw.\ 1(3)}{=} z + a_0\overrightarrow{f(v)f(p_0)} + \ldots + a_k\overrightarrow{f(v)f(p_k)} = \\ &= z + a_0\overrightarrow{zf(p_0)} + \ldots + a_k\overrightarrow{zf(p_k)} = \\ &= a_0(z + \overrightarrow{zf(p_0)}) + \ldots + a_k(z + \overrightarrow{zf(p_k)}) = \\ &= a_0f(p_0) + \ldots + a_kf(p_k). \end{aligned}$$

Definicja

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K. Mówimy, że funkcja $f : H \to M$ jest **przekształceniem afinicznym**, jeśli f spełnia jeden z równoważnych warunków:

(1) dla każdych punktów $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz układu wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ mamy:

$$f(a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k) = a_0 f(p_0) + \ldots + a_k f(p_k),$$

(2) istnieje przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ oraz punkty $p_0 \in H$ i $q_0 \in M$ takie, że dla każdego $p \in H$ mamy:

$$f(p) = q_0 + \phi(\overrightarrow{p_0 p}).$$

Przekształcenie liniowe $\phi : T(H) \to T(M)$ z warunku (2) nazywamy **pochodną** (albo przekształceniem wektorów swobodnych) przekształcenia afinicznego f i oznaczamy jako f'.

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech V, Z będą przestrzeniami liniowymi nad K. Każde przekształcenie liniowe $\phi : V \to Z$ jest przekształceniem afinicznym, przy czym $\phi' = \phi$.

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech V, Z będą przestrzeniami liniowymi nad K. Każde przekształcenie liniowe $\phi : V \to Z$ jest przekształceniem afinicznym, przy czym $\phi' = \phi$.
- Każda parametryzacja $K^n \to H$ przestrzeni afinicznej H jest przekształceniem afinicznym.

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech V, Z będą przestrzeniami liniowymi nad K. Każde przekształcenie liniowe $\phi : V \to Z$ jest przekształceniem afinicznym, przy czym $\phi' = \phi$.
- Każda parametryzacja $K^n \to H$ przestrzeni afinicznej H jest przekształceniem afinicznym.
- Niech $f : K^2 \to K^3$ będzie zadane wzorem
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2, x_2 + 1, x_2).$$
Jest to przekształcenie afiniczne, ponieważ korzystając z warunku (2) w definicji możemy wziąć przekształcenie liniowe $\phi : K^2 \to K^3$ dane wzorem
$$\phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_2)$$
oraz wybrać punkty $p_0 = (0, 0), q_0 = (2, 1, 0)$, co w rezultacie daje formułę:
$$f(x_1, x_2) = (2, 1, 0) + \phi(x_1 - 0, x_2 - 0) = (2, 1, 0) + \phi(x_1, x_2).$$

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech

  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ oraz $M = \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid x_1 - x_2 = 2\}$.

  Funkcja $f : H \to M$ dana wzorem

  $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2 - x_3 - 1)$$

  jest przekształceniem afinicznym.

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech
  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ oraz $M = \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid x_1 - x_2 = 2\}$.
  Funkcja $f : H \to M$ dana wzorem
  $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2 - x_3 - 1)$$
  jest przekształceniem afinicznym.
- Każde przekształcenie afiniczne $f : K^n \to K^m$ jest zadane wzorem:
  $$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m),$$
  gdzie $(b_1, \dots, b_m) = f(0, \dots 0)$ oraz $M(f')_{st}^{st} = A = [a_{ij}]$. Pisząc w skrócie:
  $$f(x) = Ax + b.$$

Przykłady przekształceń afinicznych.

- Niech

  $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ oraz $M = \{(x_1, x_2) \in K^2 \mid x_1 - x_2 = 2\}$.

  Funkcja $f : H \to M$ dana wzorem

  $$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2 - x_3 - 1)$$

  jest przekształceniem afinicznym.

- Każde przekształcenie afiniczne $f : K^n \to K^m$ jest zadane wzorem:

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m),$$

  gdzie $(b_1, \ldots, b_m) = f(0, \ldots 0)$ oraz $M(f')_{st}^{st} = A = [a_{ij}]$. Pisząc w skrócie:

  $$f(x) = Ax + b.$$

- Dla każdych przestrzeni afinicznych H, M nad K i każdego $q \in M$ przekształcenie $f : H \to M$ stałe, o wartości q jest afiniczne. Przy tym $f' = 0$.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K.

- Niech $\alpha \in T(H)$. Przekształcenie $f : H \to H$ spełniające $f(p) = p + \alpha$, dla każdego $p \in H$ jest afiniczne. Nazywamy je **przesunięciem równoległym o wektor** α i oznaczamy τ_α. Zatem $(\tau_\alpha)' = \mathrm{id}$.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K.

- Niech $\alpha \in T(H)$. Przekształcenie $f : H \to H$ spełniające $f(p) = p + \alpha$, dla każdego $p \in H$ jest afiniczne. Nazywamy je **przesunięciem równoległym o wektor** α i oznaczamy τ_α. Zatem $(\tau_\alpha)' = \mathrm{id}$.

- Niech $p_0 \in H$ i $a \in K$. Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p_0) = p_0$ oraz $f' = a\,\mathrm{id}$ nazywamy **jednokładnością o środku** p_0 **i skali** a.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K.

- Niech $\alpha \in T(H)$. Przekształcenie $f : H \to H$ spełniające $f(p) = p + \alpha$, dla każdego $p \in H$ jest afiniczne. Nazywamy je **przesunięciem równoległym o wektor** α i oznaczamy τ_α. Zatem $(\tau_\alpha)' = \mathrm{id}$.

- Niech $p_0 \in H$ i $a \in K$. Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p_0) = p_0$ oraz $f' = a\,\mathrm{id}$ nazywamy **jednokładnością o środku** p_0 **i skali** a.

- Niech $T(H) = W_1 \oplus W_2$. Dla $p_1, p_2 \in H$ określamy podprzestrzenie afiniczne $H_1 = p_1 + W_1, H_2 = p_2 + W_2$.
  - Przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(p_1) = p_1$ oraz f' jest rzutem na W_1 wzdłuż W_2 nazywamy **rzutem** na H_1 wzdłuż H_2.
  - Przekształcenie afiniczne $g : H \to H$ takie, że $g(p_1) = p_1$ oraz g' jest symetrią względem W_1 wzdłuż W_2 nazywamy **symetrią** względem W_1 wzdłuż W_2.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć $s(1, 0, 1)$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć $s(1, 0, 1)$.

- Niech $p = (1, 0, 1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć $s(1,0,1)$.

- Niech $p = (1,0,1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.
- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $\underbrace{(1,1,0)}_{\in H}; \underbrace{(1,0,1),(0,1,1)}_{\in T(H)}$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć $s(1, 0, 1)$.

- Niech $p = (1, 0, 1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.
- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $\underbrace{(1, 1, 0)}_{\in H}; \underbrace{(1, 0, 1), (0, 1, 1)}_{\in T(H)}$.
- Zatem obraz punktu $r = (1, 1, 0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1, 1, 0)$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć $s(1,0,1)$.

- Niech $p = (1,0,1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.
- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $\underbrace{(1,1,0)}_{\in H}; \underbrace{(1,0,1),(0,1,1)}_{\in T(H)}$.
- Zatem obraz punktu $r = (1,1,0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1,1,0)$.
- Rozważmy wektor $\overrightarrow{rp}$ równy $(0,-1,1)$. Znajdźmy współrzędne tego wektora w bazie $(1,0,1),(0,1,1),(2,1,2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$). Mamy:

$$(0,-1,1) = 4(1,0,1) + 1(0,1,1) - 2(2,1,2).$$

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć $s(1,0,1)$.

- Niech $p = (1,0,1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.
- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $\underbrace{(1,1,0)}_{\in H}; \underbrace{(1,0,1),(0,1,1)}_{\in T(H)}$.
- Zatem obraz punktu $r = (1,1,0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1,1,0)$.
- Rozważmy wektor $\overrightarrow{rp}$ równy $(0,-1,1)$. Znajdźmy współrzędne tego wektora w bazie $(1,0,1),(0,1,1),(2,1,2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$). Mamy:

$$(0,-1,1) = 4(1,0,1) + 1(0,1,1) - 2(2,1,2).$$

- A zatem z definicji symetrii liniowej s':

$$\begin{aligned} s'(0,1,-1) &= 4s'(1,0,1) + 1s'(0,1,1) - 2s'(2,1,2) = \\ &= 4(1,0,1) + 1(0,1,1) + 2(2,1,2) = (8,3,9). \end{aligned}$$

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć $s(1,0,1)$.

- Niech $p = (1,0,1)$. Dla $r \in \mathbb{R}^3$ mamy $s(p) = s(r + \overrightarrow{rp}) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp})$.
- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $\underbrace{(1,1,0)}_{\in H}; \underbrace{(1,0,1),(0,1,1)}_{\in T(H)}$.
- Zatem obraz punktu $r = (1,1,0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1,1,0)$.
- Rozważmy wektor $\overrightarrow{rp}$ równy $(0,-1,1)$. Znajdźmy współrzędne tego wektora w bazie $(1,0,1),(0,1,1),(2,1,2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$). Mamy:

$$(0,-1,1) = 4(1,0,1) + 1(0,1,1) - 2(2,1,2).$$

- A zatem z definicji symetrii liniowej s':

$$\begin{aligned} s'(0,1,-1) &= 4s'(1,0,1) + 1s'(0,1,1) - 2s'(2,1,2) = \\ &= 4(1,0,1) + 1(0,1,1) + 2(2,1,2) = (8,3,9). \end{aligned}$$

- Zatem $s(p) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp}) = (1,1,0) + (8,3,9) = (9,4,9)$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \text{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć wzór s.

- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $(1, 1, 0); (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.
- Zatem obraz punktu $r = (1, 1, 0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1, 1, 0)$.

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć wzór s.

- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $(1, 1, 0); (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.
- Zatem obraz punktu $r = (1, 1, 0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1, 1, 0)$.
- Dla $x \in \mathbb{R}^3$ mamy zatem $s(x) = s(r) + s'(\overrightarrow{rx})$, czyli w bazie standardowej:

$$s\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M(s')_{st}^{st}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Przykład. Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć wzór s.

- Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $(1,1,0); (1,0,1), (0,1,1)$.
- Zatem obraz punktu $r = (1,1,0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1,1,0)$.
- Dla $x \in \mathbb{R}^3$ mamy zatem $s(x) = s(r) + s'(\overrightarrow{rx})$, czyli w bazie standardowej:

$$s\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M(s')_{st}^{st}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

- Oczywiście biorąc bazę $\mathcal{A} = ((1,0,1),(0,1,1),(2,1,2))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$) wyznaczamy macierz

$$M(s')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  i stąd potem (znanymi metodami) wyznaczamy $M(s')_{st}^{st}$.

Podstawowe twierdzenie geometrii afinicznej - wniosek z GAL I

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad ciałem K.

- Jeśli $p_0, \ldots, p_n$ jest bazą punktową przestrzeni H oraz $q_0, \ldots, q_n$ jest dowolnym układem punktów przestrzeni M, to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ takie, że $f(p_i) = q_i$, dla $i = 0, \ldots, n$. Jest ono zadane, dla dowolnych wag $a_0, \ldots, a_n \in K$, przez:

$$f(a_0 p_0 + \ldots + a_n p_n) = a_0 q_0 + \ldots + a_n q_n.$$

- Jeśli $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest układem bazowym przestrzeni H oraz $q_0 \in M$, a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ jest dowolnym układem wektorów w $T(M)$, to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ takie, że $f(p_0) = q_0$ oraz $f'(\alpha_i) = \beta_i$, dla $i = 1, \ldots, n$. Jest ono zadane, dla dowolnych wag $a_0, \ldots, a_n \in K$, wzorem

$$f(p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = q_0 + a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n.$$

Komentarz. W artykułach popularnych, np. „Każdy trójkąt jest równoboczny"(Delta, 12.2004, dostępny online) znajdziemy definicję:

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie różnowartościowe przekształcenie płaszczyzny w siebie, przy którym obrazem każdej prostej jest prosta.

Powyższa definicja jest mniej ogólna od naszej pod dwoma względami:

- **Nie zakładamy, że przekształcenie afiniczne jest różnowartościowe**. Istnieją przekształcenie afiniczne, które wierzchołki *abc* trójkąta posyłają w ustalony punkt, albo na prostą. Nie zmienia to faktu, że powyższa uwaga gwarantuje istnienie dokładnie jednego przekształcenia afinicznego płaszczyzny w siebie przekształcającego dany układ wierzchołków trójkąta (niezdegenerowanego) w układ wierzchołki dowolnego trójkąta.
- Istnieją przekształcenia przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{Z}_2$ w siebie, które przeprowadzają każdą prostą w prostą, ale nie są afiniczne. Jeśli ciało K jest charakterystyki różnej od 2, wówczas problem ten nie zachodzi.

Uwaga

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K, niech $p_0, \mathcal{A}$ będzie układem bazowym przestrzeni H oraz niech $q_0, \mathcal{B}$ będzie układem bazowym przestrzeni M, przy czym $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech $f : H \to M$ będzie przekształceniem afinicznym, przy czym:

- $f(p_0) = q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_m\beta_m$, dla pewnych $w_1, \ldots, w_m$,
- $M(f')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = A$.

Wówczas dla każdego $p \in H$: jeśli p ma w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$ współrzędne $a_1, \ldots, a_n$ oraz $f(p)$ ma w układzie bazowym $q_0, \mathcal{B}$ współrzędne $b_1, \ldots, b_m$, to:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Jeśli $H = M$ oraz $f = \mathrm{id}$, dostajemy związek między współrzędnymi $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ punktu $p \in H$ odpowiednio w układach bazowych $p_0, \mathcal{A}$, $q_0, \mathcal{B}$.

Dowód:

- Skoro $A = M(f')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to dla $d_1, \ldots, d_m$ spełniających $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ mamy

  $f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m.$

Dowód:

- Skoro $A = M(f')^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, to dla $d_1, \ldots, d_m$ spełniających $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ mamy

  $f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m.$

- Skoro $p = p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, to:

$$\begin{aligned} f(p_0) &= f(p_0) + f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_m\beta_m + d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m = \\ &= q_0 + (w_1 + d_1)\beta_1 + \ldots + (w_m + d_m)\beta_m \end{aligned}$$

Dowód:

- Skoro $A = M(f')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, to dla $d_1, \ldots, d_m$ spełniających $\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ mamy

  $f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m.$

- Skoro $p = p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, to:

$$\begin{aligned} f(p_0) &= f(p_0) + f'(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) = \\ &= q_0 + w_1\beta_1 + \ldots + w_m\beta_m + d_1\beta_1 + \ldots + d_m\beta_m = \\ &= q_0 + (w_1 + d_1)\beta_1 + \ldots + (w_m + d_m)\beta_m \end{aligned}$$

- Wobec równości $f(p) = q_0 + b_1\beta_1 + \ldots + b_m\beta_m$ mamy:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K. Mówimy, że przekształcenie afiniczne $f : H \to M$ jest **izomorfizmem**, jeśli f jest różnowartościowe i na. Mówimy, że przestrzenie H, M są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm $f : H \to M$.

Przykłady:

- przesunięcia równoległe,
- jednokładności o skalach różnych od 0,
- symetrie,
- parametryzacje...

Pojęcie izomorfizmu przestrzeni afinicznych ma duże znaczenia, bowiem w dalszej perspektywie wykładu pozwoli nam utożsamić pewne zbiory opisane równaniami wielomianowymi zawarte w przestrzeniach afinicznych.

Uwaga - ćwiczenie

Niech H, M, L będą przestrzeniami afinicznymi nad K i $f : H \to M$, $g : M \to L$ będą przekształceniami afinicznymi. Wówczas $g \circ f : H \to L$ jest przekształceniem afinicznym. Przy tym $(g \circ f)' = g' \circ f'$.

Uwaga - ćwiczenie

Niech H, M, L będą przestrzeniami afinicznymi nad K i $f : H \to M$, $g : M \to L$ będą przekształceniami afinicznymi. Wówczas $g \circ f : H \to L$ jest przekształceniem afinicznym. Przy tym $(g \circ f)' = g' \circ f'$.

Uwaga - wniosek z GAL I

Niech H, M będą przestrzeniami afinicznymi nad K i niech $f : H \to M$ będzie przekształceniem afinicznym. Następujące warunki są równoważne:

- f jest izomorfizmem,
- f przeprowadza pewną (każdą) bazę punktową przestrzeni H na bazę punktową przestrzeni M,
- istnieje przekszt. af. $g : M \to H$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_H$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_M$,
- $f' : T(H) \to T(M)$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Uwaga - ćwiczenie

Niech H, M będę skończenie wymiarowymi przestrzeniami afinicznymi nad K. Przestrzenie H, M są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim T(H) = \dim T(M)$.

Wniosek

Każda n-wymiarowa przestrzeń afiniczna nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną K^n

Uwaga - ćwiczenie

Niech H, M będę skończenie wymiarowymi przestrzeniami afinicznymi nad K. Przestrzenie H, M są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim T(H) = \dim T(M)$.

Niezmienniki przekształceń afinicznych:

- współliniowość (koplanarność, etc.) punktów,
- równoległość podprzestrzeni (słaba i silna),
- proporcje podziału odcinka,
- np. przecinanie się trzech prostych w jednym punkcie.

Wniosek

Każda n-wymiarowa przestrzeń afiniczna nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią afiniczną K^n

Więcej i dokładniej o przekształceniach afinicznych i ich klasyfikacji można przeczytać w: A. Reventós Tarrida: *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*.