Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 18, 11.05.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wartość funkcji $\omega : V \times V \to V$ przypisującej parze (α, β) wektor $\omega(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$, nazywamy **wektorem łączącym** α z β, albo krócej **wektorem od** α **do** β i oznaczamy jako $\overrightarrow{\alpha\beta}$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wartość funkcji $\omega : V \times V \to V$ przypisującej parze (α, β) wektor $\omega(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$, nazywamy **wektorem łączącym** α z β, albo krócej **wektorem od** α **do** β i oznaczamy jako $\overrightarrow{\alpha\beta}$.

Przykład. Rozwiązaniem równania $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ w $\mathbb{R}^3$ jest np. zbiór

$$(3, 0, 0) + \text{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1)).$$

A więc jest to zbiór wektorów łączących wektor $(3, 0, 0)$ oraz dowolny wektor z podprzestrzeni $\text{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1))$. Rozwiązania tego równania można także opisać jako zbiór $(1, 1, 1) + \text{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1))$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wartość funkcji $\omega : V \times V \to V$ przypisującej parze (α, β) wektor $\omega(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$, nazywamy **wektorem łączącym** α z β, albo krócej **wektorem od** α **do** β i oznaczamy jako $\overrightarrow{\alpha\beta}$.

Przykład. Rozwiązaniem równania $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ w $\mathbb{R}^3$ jest np. zbiór

$$(3, 0, 0) + \mathrm{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1)).$$

A więc jest to zbiór wektorów łączących wektor $(3, 0, 0)$ oraz dowolny wektor z podprzestrzeni $\mathrm{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1))$. Rozwiązania tego równania można także opisać jako zbiór $(1, 1, 1) + \mathrm{lin}((0, 1, -1), (-1, 0, 1))$.

Prosty wniosek

Dwie warstwy $\alpha + W$, $\beta + W$ podprzestrzeni W w przestrzeni liniowej V są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{\alpha\beta}$ należy do W.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

- Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.
- Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami.**
- Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy **przestrzenią styczną**[a] do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.

---

[a] Lub przestrzenią wektorów swobodnych.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

- Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.
- Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami.**
- Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy **przestrzenią styczną**[a] do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.

[a] Lub przestrzenią wektorów swobodnych.

Przykłady.

- Każda przestrzeń liniowa V ma strukturę przestrzeni afinicznej – jest to warstwa podprzestrzeni $W = V$ postaci $0 + V$.
- Dla każdego $q \in V$ zbiór $\{q\}$ jest przestrzenią afiniczną jako warstwa podprzestrzeni zerowej.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

- Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.
- Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami.**
- Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy **przestrzenią styczną**[a] do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.

[a] Lub przestrzenią wektorów swobodnych.

Przykład. Zbiór $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 4, x_2 - 2x_3 = 5\}$ jest przestrzenią afiniczną. Mamy

$$T(H) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\} = \text{lin}((2, 2, 1)),$$

a więc

$$H = (11, 7, 1) + \text{lin}((2, 2, 1)).$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

- Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.
- Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami.**
- Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy **przestrzenią styczną**[a] do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.

[a] Lub przestrzenią wektorów swobodnych.

Oznaczenia. Elementy przestrzeni afinicznej W zawartej w przestrzeni liniowej V, czyli punkty, oznaczamy małymi literami naszego alfabetu, a więc p, q, r, s itd. Wektory swobodne natomiast będziemy oznaczać literami greckimi: α, β, γ itd. Jako, że zarówno punkty jak i wektory są w istocie elementami V, to w przypadku działania w przestrzeni współrzędnych $V = K^n$ będziemy zarówno współrzędne punktów, jak i wektorów zapisywać jednakowo w okrągłych nawiasach.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

- Mówimy, ze podzbiór $H \subseteq V$ jest **przestrzenią afiniczną nad** K, jeśli H jest warstwą pewnej podprzestrzeni w V.
- Elementy przestrzeni afinicznej H nazywamy **punktami.**
- Podprzestrzeń liniową W, której warstwą jest H nazywamy **przestrzenią styczną**[a] do przestrzeni afinicznej H i oznaczamy $T(H)$.

[a] Lub przestrzenią wektorów swobodnych.

Obserwacja. Jeśli punkty p, q należą do przestrzeni afinicznej W, to kombinacje

$$2p, \quad p+q$$

nie muszą do niej należeć, choć same napisy mają sens, bo wykonujemy działania w przestrzeni liniowej. Określmy kiedy stosowanie tych operacji jest przydatne.

Definicja

Niech V – przestrzeń liniowa nad K oraz niech $X \subseteq V$. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_n = 1$ **kombinacją afiniczną punktów** $p_0, \ldots, p_n$ **z wagami** $a_0, \ldots, a_n$ nazwiemy sumę:

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$$

Definicja

Niech V – przestrzeń liniowa nad K oraz niech $X \subseteq V$. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_n = 1$ **kombinacją afiniczną punktów** $p_0, \ldots, p_n$ **z wagami** $a_0, \ldots, a_n$ nazwiemy sumę:

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$$

Przykład. Dla przestrzeni afinicznej $X = \mathbb{R}^3$ i punktów

$$p_0 = (1, 2, 1), \quad p_1 = (1, -1, -1), \quad p_2 = (0, 1, 3)$$

mamy

$$2p_0 + 3p_1 - 4p_2 = 2(1, 2, 1) + 3(1, -1, -1) - 4(0, 1, 3) = (5, -3, -13),$$

więc $p = (5, -3, -13)$ jest kombinacją afiniczną p_0, p_1, p_2 z wagami $2, 3, -4$.

Definicja

Niech V – przestrzeń liniowa nad K oraz niech $X \subseteq V$. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_n = 1$ **kombinacją afiniczną punktów** $p_0, \ldots, p_n$ **z wagami** $a_0, \ldots, a_n$ nazwiemy sumę:

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$$

Przykład. Dla dowolnych punktów $p, q \in X$ oraz dowolnego $t \in K$ punkt

$$tp + (1 - t)q \qquad (*)$$

jest kombinacją afiniczną punktów p, q z wagami $t, 1 - t$.

W interpretacji geometrycznej punkty postaci $(*)$ należą do prostej zawierającej punkty p i q. Gdy $K = \mathbb{R}$ oraz $t \in [0, 1]$, zbiór punktów postaci $\{tp + (1 - t)q\}$ interpretować będziemy wkrótce jako odcinek w przestrzeni euklidesowej afinicznej (wymiaru nie mniejszego niż 1 o końcach w punktach p i q).

Definicja

Niech V – przestrzeń liniowa nad K oraz niech $X \subseteq V$. Dla każdych punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n \in X$ i każdych $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_n = 1$ **kombinacją afiniczną punktów** $p_0, \ldots, p_n$ **z wagami** $a_0, \ldots, a_n$ nazwiemy sumę:

$$a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$$

Przykład. Dla dowolnych punktów $p, q, r \in X$ punkt

$$\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}r$$

jest kombinacją afiniczną punktów p, q, r. W interpretacji geometrycznej jest to środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach w punktach p, q, r. Również inne punkty szczególne trójkąta niezdegenerowanego będzie można przedstawiać jako kombinacje afiniczne jego wierzchołków (o czym dalej).

Fakt

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_k = 1$ zachodzi:

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \iff \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

Fakt

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_k = 1$ zachodzi:

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

Przykład. Zauważmy, że wybór punktu p_0 jest zupełnie arbitralny. Dla punktów

$$p_0 = (1, 2, 1), \quad p_1 = (1, -1, -1), \quad p_2 = (0, 1, 3), \quad p = (5, -3, -13)$$

w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ mamy

$$p = 2p_0 + 3p_1 - 4p_2,$$

a więc równoważnie

$$\overrightarrow{p_0 p} = 3\overrightarrow{p_0 p_1} - 4\overrightarrow{p_0 p_2},$$

a także

$$\overrightarrow{p_1 p} = 2\overrightarrow{p_1 p_0} - 4\overrightarrow{p_1 p_2} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{p_2 p} = 2\overrightarrow{p_2 p_0} + 3\overrightarrow{p_2 p_1}.$$

Fakt

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_k = 1$ zachodzi:

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \iff \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

Dowód. Jeśli $p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k$, to

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0 p} &= p - p_0 = \\
&= a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k - p_0 = \\
&= a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k - \underbrace{(a_0 + \ldots + a_k)}_{1} p_0 = \\
&= a_0 (p_0 - p_0) + \ldots + a_k (p_k - p_0) = \\
&= a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.
\end{aligned}$$

Fakt

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Dla każdych $p_0, p_1, \ldots, p_k, p \in V$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$ spełniających $a_0 + \ldots + a_k = 1$ zachodzi:

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k \iff \overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

Dowód. Na odwrót, jeśli $\overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}$, to:

$$\begin{aligned}
p &= p_0 + \overrightarrow{p_0 p} \\
&= \underbrace{(a_0 + \ldots + a_k)}_{1} p_0 + a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k} = \\
&= a_0 p_0 + a_1 (p_0 + \overrightarrow{p_0 p_1}) + \ldots + a_k (p_k + \overrightarrow{p_0 p_k}) = \\
&= a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k.
\end{aligned}$$

Fakt

Niech $q_0, \ldots, q_r$ będzie układem punktów w przestrzeni liniowej V, z których każdy jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$. Wówczas każda kombinacja afiniczna punktów $q_0, \ldots, q_r$ jest też kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$.

Fakt

Niech $q_0, \ldots, q_r$ będzie układem punktów w przestrzeni liniowej V, z których każdy jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$. Wówczas każda kombinacja afiniczna punktów $q_0, \ldots, q_r$ jest też kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$.

Dowód. Dla każdego $i = 1, \ldots, r$ mamy $q_i = a_{i0}p_0 + \ldots + a_{ik}p_k$, dla pewnych wag $a_{i0}, \ldots, a_{ik}$. Stąd dla każdego układu wag $a_0, \ldots, a_r$ otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
a_0 q_0 + \ldots + a_k q_k &= a_0(a_{00}p_0 + \ldots + a_{0k}p_k) + \ldots + a_k(a_{k0}p_0 + \ldots + a_{kk}p_k) = \\
&= (a_0 a_{00} + \ldots + a_k a_{k0})p_0 + \ldots + (a_0 a_{0k} + \ldots + a_k a_{kk})p_k
\end{aligned}
$$

Fakt

Niech $q_0, \ldots, q_r$ będzie układem punktów w przestrzeni liniowej V, z których każdy jest kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$. Wówczas każda kombinacja afiniczna punktów $q_0, \ldots, q_r$ jest też kombinacją afiniczną punktów $p_0, \ldots, p_k$.

Dowód. Dla każdego $i = 1, \ldots, r$ mamy $q_i = a_{i0}p_0 + \ldots + a_{ik}p_k$, dla pewnych wag $a_{i0}, \ldots, a_{ik}$. Stąd dla każdego układu wag $a_0, \ldots, a_r$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0q_0 + \ldots + a_kq_k &= a_0(a_{00}p_0 + \ldots + a_{0k}p_k) + \ldots + a_k(a_{k0}p_0 + \ldots + a_{kk}p_k) = \\ &= (a_0a_{00} + \ldots + a_ka_{k0})p_0 + \ldots + (a_0a_{0k} + \ldots + a_ka_{kk})p_k \end{aligned}$$

Mamy jednak:

$$\begin{aligned} &(a_0a_{00} + \ldots + a_ka_{k0}) + \ldots + (a_0a_{0k} + \ldots + a_ka_{kk}) \\ &= a_0(\underbrace{a_{00} + \ldots + a_{0k}}_{1}) + \ldots + a_k(\underbrace{a_{k0} + \ldots + a_{kk}}_{1}) \\ &= a_0 + \ldots + a_k = 1. \end{aligned}$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Mówimy, że podzbiór $H \subseteq V$ **jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne**, jeśli dla każdych punktów $p_0. \ldots, p_k \in H$ i każdych wag $a_0, \ldots, a_k$ zachodzi $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k \in H$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Mówimy, że podzbiór $H \subseteq V$ **jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne**, jeśli dla każdych punktów $p_0. \ldots, p_k \in H$ i każdych wag $a_0, \ldots, a_k$ zachodzi $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k \in H$.

Twierdzenie

Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Następujące warunki są równoważne.

(i) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne,

(ii) H jest warstwą podprzestrzeni przestrzeni V,

(iii) H jest przestrzenią afiniczną.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad K. Mówimy, że podzbiór $H \subseteq V$ **jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne**, jeśli dla każdych punktów $p_0 \ldots, p_k \in H$ i każdych wag $a_0, \ldots, a_k$ zachodzi $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k \in H$.

Twierdzenie

Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Następujące warunki są równoważne.

(i) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne,

(ii) H jest warstwą podprzestrzeni przestrzeni V,

(iii) H jest przestrzenią afiniczną.

Oczywiście równoważność (ii) i (iii) wynika z definicji przestrzeni afinicznej. Dowodzimy (i) $\Rightarrow$ (ii), a potem (ii) $\Rightarrow$ (i).

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$.

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0 p_1}$, $\overrightarrow{p_0 p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$.
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc punkt $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$ należy do H.

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0 p_1}$, $\overrightarrow{p_0 p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$.
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc punkt $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$ należy do H.
- Stąd wektor $\overrightarrow{p_0 p}$ należy do W. Ale $\overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + a_2 \overrightarrow{p_0 p_2} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2$.

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0 p_1}$, $\overrightarrow{p_0 p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$.
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc punkt $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$ należy do H.
- Stąd wektor $\overrightarrow{p_0 p}$ należy do W. Ale $\overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + a_2 \overrightarrow{p_0 p_2} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2$.
- Stąd $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \in W$, co wobec dowolności $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ dowodzi, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Dowód (i) $\Rightarrow$ (ii)

- Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0 p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0 p_1}$, $\overrightarrow{p_0 p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$.
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc punkt $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$ należy do H.
- Stąd wektor $\overrightarrow{p_0 p}$ należy do W. Ale $\overrightarrow{p_0 p} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + a_2 \overrightarrow{p_0 p_2} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2$.
- Stąd $a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \in W$, co wobec dowolności $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ dowodzi, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V.
- Ponadto $H = p_0 + W$ na mocy definicji W. Zatem H jest warstwą podprzestrzeni W w V.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.
- Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.
- Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$.
- Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.
- Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$.
- Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$.
- Zatem
$$\sum_{i=0}^{k} a_i p_i = \sum_{i=0}^{k} a_i (q + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} a_i q + \sum_{i=0}^{k} a_i \alpha_i = q + \gamma,$$
gdzie $\gamma = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ jest kombinacją liniową wektorów przestrzeni W, więc należy do W.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.
- Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$.
- Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$.
- Zatem
$$\sum_{i=0}^{k} a_i p_i = \sum_{i=0}^{k} a_i (q + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} a_i q + \sum_{i=0}^{k} a_i \alpha_i = q + \gamma,$$
gdzie $\gamma = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ jest kombinacją liniową wektorów przestrzeni W, więc należy do W.
- Stąd $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = q + \gamma \in q + W = H$.

Dowód (ii) $\Rightarrow$ (i)

- Załóżmy, że H jest warstwą, czyli $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V.
- Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$.
- Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$.
- Zatem
$$\sum_{i=0}^{k} a_i p_i = \sum_{i=0}^{k} a_i(q + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} a_i q + \sum_{i=0}^{k} a_i \alpha_i = q + \gamma,$$
gdzie $\gamma = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ jest kombinacją liniową wektorów przestrzeni W, więc należy do W.
- Stąd $a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k = q + \gamma \in q + W = H$.
- Zatem H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne.

Definicja

Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli $H_1 \subseteq H_2$, to mówimy, że H_1 jest **podprzestrzenią przestrzeni afinicznej** H_2.

Definicja

Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli $H_1 \subseteq H_2$, to mówimy, że H_1 jest **podprzestrzenią przestrzeni afinicznej** H_2.

Uwaga - łatwe ćwiczenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej H.

Definicja

Niech H_1, H_2 będą przestrzeniami afinicznymi w przestrzeni liniowej V. Jeśli $H_1 \subseteq H_2$, to mówimy, że H_1 jest **podprzestrzenią przestrzeni afinicznej H_2**.

Uwaga - łatwe ćwiczenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ jest podprzestrzenią przestrzeni afinicznej H.

Definicja

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji afinicznych punktów $p_0, \ldots, p_k$ nazywamy **podprzestrzenią afiniczną rozpiętą na** $p_0, \ldots, p_k$ i oznaczamy

$$\mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k).$$

Uwaga

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k})$.

Przykład. W przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ niech

$$H = \mathrm{af}((1,0,2),(2,1,3),(4,1,1)).$$

Wówczas przestrzeń styczna $T(H)$ to

$$\mathrm{lin}((1,1,1),(3,1,-1)) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Stąd sama podprzestrzeń H opisana jest jako zbiór rozwiązań układu złożonego z pojedynczego równania $x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$.

Uwaga

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k})$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Skoro H jest przestrzenią afiniczną, to zgodnie z dowodem twierdzenia charakteryzującego przestrzenie afiniczne jako podzbiory zamknięte na kombinacje afiniczne wiemy, że dla każdego $q \in H$ mamy $T(H) = \{\overrightarrow{qp} \mid p \in H\}$.

Uwaga

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})$.

Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Skoro H jest przestrzenią afiniczną, to zgodnie z dowodem twierdzenia charakteryzującego przestrzenie afiniczne jako podzbiory zamknięte na kombinacje afiniczne wiemy, że dla każdego $q \in H$ mamy $T(H) = \{\overrightarrow{qp} \mid p \in H\}$. Jeśli $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, to biorąc $q = p_0$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
T(H) &= \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in H\} = \\
&= \{\overrightarrow{p_0p} \mid \text{dla wszystkich } p = a_0p_0 + \ldots + a_kp_k, \text{ gdzie } a_0 + \ldots + a_k = 1\} = \\
&= \{a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k} \mid a_1, \ldots, a_k \in K\} = \\
&= \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}).
\end{aligned}
$$

Uwaga

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H nad K. Następujące warunki są równoważne:

(1) $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$,

(2) $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})$.

Na odwrót: jeśli $T(H) = \mathrm{lin}(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k})$, to już wiemy, że dla każdego $p \in H$ mamy

$$\overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k},$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$. Chcemy, by $p \in \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$. Przyjmując $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_k$ otrzymujemy

$$p = p_0 + \overrightarrow{p_0p} = (a_0 + \ldots + a_k)p_0 + a_1(p_1 - p_0) + \ldots + a_k(p_k - p_0).$$

Po uproszczeniu dostajemy $p = a_0p_0 + \ldots + a_kp_k$. Wobec dowolności p otrzymujemy stąd (1).

Definicja

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie układem punktów przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.

- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie zależny** (albo, że jest **w położeniu szczególnym**), jeśli jeden z punktów tego układu jest kombinacją afiniczną pozostałych.
- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie niezależny** (albo, że jest **w położeniu ogólnym**), jeśli nie jest on w położeniu szczególnym.

Definicja

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie układem punktów przestrzeni afinicznej H nad ciałem K.

- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie zależny** (albo, że jest **w położeniu szczególnym**), jeśli jeden z punktów tego układu jest kombinacją afiniczną pozostałych.
- Mówimy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest **afinicznie niezależny** (albo, że jest **w położeniu ogólnym**), jeśli nie jest on w położeniu szczególnym.

Przykład. W przestrzeni $H = \mathbb{R}^3$ układ

$$((3, 7, 4), (1, 9, 7), (5, 5, 1))$$

jest afinicznie zależny, bo mamy

$$(1, 9, 7) = 2(3, 7, 4) - 1(5, 5, 1).$$

Układ $(3, 1, 1), (1, 2, 1)$ jest natomiast afinicznie niezależny w $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ leżą w przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

Twierdzenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ leżą w przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

- Załóżmy, że układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny. Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$:
$$\overrightarrow{p_0p_k} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}}.$$

Twierdzenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ leżą w przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

- Założmy, że układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny. Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$:
$$\overrightarrow{p_0p_k} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}}.$$
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_{k-1}$. Wówczas $a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_{k-1}p_{k-1}$ to:
$$a_0(p_0 + \overrightarrow{p_0p_0}) + a_1(p_0 + \overrightarrow{p_0p_1}) + \ldots + a_{k-1}(p_0 + \overrightarrow{p_0p_{k-1}}) =$$
$$= (a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1})p_0 + a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}} =$$
$$= p_0 + \overrightarrow{p_0p_k} = p_k.$$

Twierdzenie

Niech $p_0, \ldots, p_k$ leżą w przestrzeni afinicznej H nad K. Równoważne są warunki:

(1) układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,

(2) układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

- Załóżmy, że układ $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo zależny. Po ewentualnym przenumerowaniu możemy zakładać, że dla pewnych $a_1, \ldots, a_k \in K$:
$$\overrightarrow{p_0p_k} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}}.$$
- Niech $a_0 = 1 - a_1 - \ldots - a_{k-1}$. Wówczas $a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_{k-1}p_{k-1}$ to:
$$\begin{aligned} & a_0(p_0 + \overrightarrow{p_0p_0}) + a_1(p_0 + \overrightarrow{p_0p_1}) + \ldots + a_{k-1}(p_0 + \overrightarrow{p_0p_{k-1}}) = \\ &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1})p_0 + a_1\overrightarrow{p_0p_1} + \ldots + a_{k-1}\overrightarrow{p_0p_{k-1}} = \\ &= p_0 + \overrightarrow{p_0p_k} = p_k. \end{aligned}$$
- A zatem $p_k \in \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_{k-1})$. W konsekwencji dostajemy (1) $\Rightarrow$ (2).

Na odwrót: przypuśćmy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny. Chcemy wykazać liniową zależność specyficznego zbioru wektorów (o początkach w p_0).

- **Przypadek 1.** Punkt p_0 jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Niech $p_0 = a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k$, przy czym $a_1 + \ldots + a_k = 1$. Mamy więc

$$0 = \overrightarrow{p_0 p_0} = \overrightarrow{p_0(a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k)} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$

  Zatem układ $\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}$ jest liniowo zależny, i mamy sprzeczność z (2).

Na odwrót: przypuśćmy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny. Chcemy wykazać liniową zależność specyficznego zbioru wektorów (o początkach w p_0).

- **Przypadek 1.** Punkt p_0 jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Niech $p_0 = a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k$, przy czym $a_1 + \ldots + a_k = 1$. Mamy więc
$$0 = \overrightarrow{p_0 p_0} = \overrightarrow{p_0 (a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k)} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$
Zatem układ $\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}$ jest liniowo zależny, i mamy sprzeczność z (2).
- **Przypadek 2.** Punkt p_0 nie jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Np. układ punktów $p_0 = (1,2), p_1 = (2,2), p_2 = (3,3), p_3 = (4,4)$ jest afinicznie zależny w $\mathbb{R}^2$, ale $p_0 \notin \mathtt{af}(p_1, p_2, p_3)$.

Na odwrót: przypuśćmy, że układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie zależny. Chcemy wykazać liniową zależność specyficznego zbioru wektorów (o początkach w p_0).

- **Przypadek 1.** Punkt p_0 jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Niech $p_0 = a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k$, przy czym $a_1 + \ldots + a_k = 1$. Mamy więc
$$0 = \overrightarrow{p_0 p_0} = \overrightarrow{p_0(a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k)} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_k \overrightarrow{p_0 p_k}.$$
Zatem układ $\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}$ jest liniowo zależny, i mamy sprzeczność z (2).
- **Przypadek 2.** Punkt p_0 nie jest kombinacją afiniczną punktów $p_1, \ldots, p_k$. Np. układ punktów $p_0 = (1, 2), p_1 = (2, 2), p_2 = (3, 3), p_3 = (4, 4)$ jest afinicznie zależny w $\mathbb{R}^2$, ale $p_0 \notin \mathrm{af}(p_1, p_2, p_3)$.
- Po ewentualnym przenumerowaniu $p_1, \ldots, p_k$ możemy założyć, że $p_k \in \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_{k-1})$. W szczególności $p_k = a_0 p_0 + \ldots + a_{k-1} p_{k-1}$, gdzie $a_0 + \ldots + a_{k-1} = 1$. A zatem:
$$\overrightarrow{p_0 p_k} = a_0 \overrightarrow{p_0 p_0} + a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_{k-1} \overrightarrow{p_0 p_{k-1}} = a_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \ldots + a_{k-1} \overrightarrow{p_0 p_{k-1}},$$
czyli układ $\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k}$ jest liniowo zależny, co przeczy (2).

Definicja

Mówimy, że układ punktów $p_0, \ldots, p_k$ punktów przestrzeni afinicznej H jest **bazą punktową** przestrzeni H, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,
- $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, czyli układ $p_0, \ldots, p_k$ **rozpina** H.

Definicja

Mówimy, że układ punktów $p_0, \ldots, p_k$ punktów przestrzeni afinicznej H jest **bazą punktową** przestrzeni H, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,
- $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, czyli układ $p_0, \ldots, p_k$ **rozpina** H.

Wniosek

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Układ $p_0, \ldots, p_k$ jest baza punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest bazą przestrzeni $T(H)$. W szczególności każde dwie skończone bazy punktowe przestrzeni afinicznej są równoliczne.

Definicja

Mówimy, że układ punktów $p_0, \ldots, p_k$ punktów przestrzeni afinicznej H jest **bazą punktową** przestrzeni H, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- układ $p_0, \ldots, p_k$ jest afinicznie niezależny,
- $H = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, czyli układ $p_0, \ldots, p_k$ **rozpina** H.

Wniosek

Niech $p_0, \ldots, p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Układ $p_0, \ldots, p_k$ jest baza punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest bazą przestrzeni $T(H)$. W szczególności każde dwie skończone bazy punktowe przestrzeni afinicznej są równoliczne.

Definicja

Wymiarem przestrzeni afinicznej H nazywamy wymiar jej przestrzeni stycznej $T(H)$. Wymiar przestrzeni H oznaczamy $\dim H$.

- Przestrzenie afiniczne wymiaru 1 nazywamy **prostymi**, a przestrzenie afiniczne wymiaru 2 nazywamy **płaszczyznami.**

- Przestrzenie afiniczne wymiaru 1 nazywamy **prostymi**, a przestrzenie afiniczne wymiaru 2 nazywamy **płaszczyznami.**
- Układ $0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, wektorów przestrzeni liniowej K^n, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ są wektorami bazy standardowej, tworzy bazę punktową przestrzeni afinicznej K^n. Przestrzeń ta ma wymiar równy n.

- Przestrzenie afiniczne wymiaru 1 nazywamy **prostymi**, a przestrzenie afiniczne wymiaru 2 nazywamy **płaszczyznami.**
- Układ $0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, wektorów przestrzeni liniowej K^n, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ są wektorami bazy standardowej, tworzy bazę punktową przestrzeni afinicznej K^n. Przestrzeń ta ma wymiar równy n.
- Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 6\}$. Oczywiście $\dim H = 2$. Weźmy $p_0 = (1, 1, 2) \in H$ i niech $p_1 = p_0 + (1, 1, 0) = (2, 2, 2)$ oraz $p_2 = p_0 + (0, 3, 1) = (1, 4, 3)$. Układ p_0, p_1, p_2 to bazą punktowa H.

- Przestrzenie afiniczne wymiaru 1 nazywamy **prostymi**, a przestrzenie afiniczne wymiaru 2 nazywamy **płaszczyznami.**
- Układ $0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, wektorów przestrzeni liniowej K^n, gdzie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ są wektorami bazy standardowej, tworzy bazę punktową przestrzeni afinicznej K^n. Przestrzeń ta ma wymiar równy n.
- Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 3x_3 = 6\}$. Oczywiście $\dim H = 2$. Weźmy $p_0 = (1, 1, 2) \in H$ i niech $p_1 = p_0 + (1, 1, 0) = (2, 2, 2)$ oraz $p_2 = p_0 + (0, 3, 1) = (1, 4, 3)$. Układ p_0, p_1, p_2 to bazą punktowa H.
- Dla $M = \mathrm{af}((1, 2, 3), (5, 4, 1), (-3, 0, 5), (2, 1, 4)) \subseteq \mathbb{R}^3$ znajdujemy opis przestrzeni $T(M)$ jako

$$\mathrm{lin}((4, 2, -2), (-4, -2, 2), (1, -1, 1)) = \mathrm{lin}((4, 2, -2), (1, -1, 1)).$$

A zatem $\dim M = 2$. Układ trzech punktów:

$$(1, 2, 3), (1, 2, 3) + (4, 2, -2), (1, 2, 3) + (1, -1, 1)$$

jest więc bazą punktową przestrzeni M.

Następujące własności baz punktowych są konsekwencjami odpowiednich własności baz przestrzeni liniowych oraz powyższego wniosku.

Twierdzenie

Każda przestrzeń afiniczna ma bazę punktową. Jeśli $\dim H = k$, to każda baza punktowa przestrzeni H ma $k+1$ punktów. Układ $p_0, \ldots, p_k$ punktów w przestrzeni afinicznej H nad K jest bazą punktową przestrzeni H wtedy i tylko wtedy, dla każdego $p \in H$ istnieje dokładnie jeden układ wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ taki, że $p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k$.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $p_0, \ldots, p_k$ będzie bazą punktową przestrzeni H. **Współrzędnymi (barycentrycznymi) punktu** $p \in H$ **w bazie punktowej** $p_0, \ldots, p_k$ nazywamy układ wag $a_0, \ldots, a_k \in K$ taki, że $p = a_0 p_0 + \ldots + a_k p_k$.

Definicja

Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K. Jeśli p_0 jest punktem przestrzeni H oraz $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni $T(H)$, to układ $p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazywamy **układem bazowym** dla przestrzeni H. Dla punktu $p \in H$ układ $a_1, \ldots, a_n$ elementów ciała K taki, że $p = p_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ nazywamy **współrzędnymi punktu p w układzie bazowym $p_0, \mathcal{A}$.**

Odwzorowanie $K^n \to H$ opisane wzorem:

$$(s_1, \ldots, s_n) \mapsto p_0 + s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \ldots + s_n\alpha_n,$$

nazywamy **parametryzacją** przestrzeni H.

Przykład. Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5\}$. Wtedy $(1, 0, 1); (1, 2, 0), (0, 3, 1)$ jest układem bazowym w H, a parametryzacja H to (np.): $\mathbb{R}^2 \ni (s_1, s_2) \mapsto (1, 0, 1) + s_1(1, 2, 0) + s_2(0, 3, 1) = (s_1 + 1, 2s_1 + 3s_2, s_2 + 1) \in H$.

W zadaniach dotyczących przestrzeni afinicznych stosujemy także specyficzną dla geometrii elementarnej nomenklaturę. Mówimy chociażby o tym, że

- **punkt** p **leży na** prostej/płaszczyźnie, co oznacza, że należy do tej prostej/płaszczyzny,
- prosta, płaszczyzna lub przestrzeń afiniczna **przechodzi przez dany punkt**, co znaczy, że ten punkt do niej należy,
- proste, płaszczyzny lub przestrzenie afiniczne **przecinają się** mając na myśli to, że odpowiednie przestrzenie afiniczne mają punkt wspólny (lub nie!),
- punkt p **leży pomiędzy punktami** q, r, jeśli $p = tq + (1-t)r$, gdzie $0 < t < 1$ (jesteśmy tu nad $\mathbb{R}$ lub ewentualnie innym ciałem uporządkowanym),
- punkty p, q, r są **współliniowe**, jeśli leżą na jednej prostej,
- zachodzi równość podprzestrzeni $T(H_1) = T(H_2)$, to mówimy, że przestrzenie H_1, H_2 są **równoległe** (czasem mówimy tak też, gdy $T(H_1) \subseteq T(H_2)$),
- podprzestrzenie F_1, F_2 **są skośne**, to znaczy: $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ oraz $T(F_1) \cap T(F_2) = \{0\}$.