Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 15, 30.04.2021 r.

Ostatnio mówiliśmy o **formach kwadratowych** na przestrzeni liniowej V nad ciałem K, czyli o takich funkcjach $q : V \to K$, dla których istnieje forma dwuliniowa $h : V \times V \to K$ taka, że dla każdego $\alpha \in V$ zachodzi $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$.

Przypomnienie

Niech V – sk. wymiarowa nad K i niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza przestrzeni V. Wówczas $q : V \to K$ jest formą kwadratową na V wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a_{ij} \in K$, dla $i, j = 1, \ldots, n$, takie, że dla każdych $x_1, \ldots, x_n \in K$ zachodzi równość:

$$q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Jeśli $\mathrm{char}\, K \neq 2$, to można wybrać taką bazę $\mathcal{A}$, w której q ma postać diagonalną, czyli dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in K$ oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in K$ mamy:

$$q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2.$$

Równoważność form kwadratowych n zmiennych nad ciałem K

Niech f, g będą formami kwadratowymi na przestrzeni K^n. Powiemy, że formy f, g są **równoważne** nad ciałem K, ozn. $f \cong g$, jeśli istnieje macierz odwracalna $P = [p_{ij}] \in M_n(K)$ taka, że dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in K$ spełniających:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

mamy $f(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_n)$.

Formę kwadratową q na przestrzeni $V \simeq K^n$ nazywamy równoważną z formą q' na K^n, jeśli $(V_1, h) \cong (K^n, h')$, gdzie $h(v, v) = q(v)$, $h'(v, v) = q'(v)$.

Uwaga. Jeśli $f(X) = X^T G(f, \mathcal{B}) X$, dla pewnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni K^n, to biorąc bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n taką, że $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = P$ mamy:

$$g(Y) = f(X) = f(PY) = (PY)^T \cdot G(f; \mathcal{B}) \cdot PY = Y^T \cdot P^T G(f; \mathcal{B}) P \cdot Y = Y^T \cdot G(f, \mathcal{A}) \cdot Y.$$

Dwa zasadnicze zagadnienia teorii form kwadratowych:

1. Problem klasyfikacji form kwadratowych z dokładnością do równoważności.
2. Problem reprezentowalności elementów z K przez formy kwadratowe.

Dwa zasadnicze zagadnienia teorii form kwadratowych:

1. Problem klasyfikacji form kwadratowych z dokładnością do równoważności.
2. Problem reprezentowalności elementów z K przez formy kwadratowe.

Wyniki związane z pierwszym problemem dla przestrzeni nad K, gdzie $\operatorname{char} K \neq 2$.

- Twierdzenie (Lagrange) Każda forma kwadratowa na przestrzeni K^n jest równoważna formie postaci $q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$.
- Przyporządkowania
  - $h \mapsto q$, gdzie $q(\alpha) = h(\alpha, \alpha)$, dla każdego $\alpha \in V$,
  - $q \mapsto h$, gdzie $h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))$,

  zadają bijekcje pomiędzy formami dwuliniowymi symetrycznymi na przestrzeni V a formami kwadratowymi na V. Jeśli formy dwuliniowe symetryczne h_1, h_2 odpowiadają formom kwadratowym q_1, q_2 na V, to:

$$q_1 \cong q_2 \Leftrightarrow (V, h_1) \cong (V, h_2).$$

Wyniki związane z pierwszym problemem dla przestrzeni V wymiaru n nad K, gdzie $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

- Twierdzenie (Lagrange) Każda forma kwadratowa na przestrzeni V nad ciałem K jest równoważna formie postaci
$$q(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2,$$
dla pewnych $a_1, \ldots, a_n \in K$.
- Gdy $K = \mathbb{C}$, wówczas dla każdej formy kwadratowej q na V istnieje $0 \leq r \leq n$ takie, że $q \cong q_r$, gdzie $q_r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ zadana jest wzorem
$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_r^2.$$
Co więcej $q_r \cong q_{r'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r = r'$.
- Gdy $K = \mathbb{R}$, wówczas dla każdej formy kwadratowej q na V istnieją $r, s \geq 0$, $r + s \leq n$ takie, że $q \cong q_{r,s} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem
$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2.$$
Co więcej, $q_{r,s} \cong q_{r',s'} \Leftrightarrow r = r', s = s'$.

Uwaga: w dalszym ciągu wykładamy, że $\operatorname{char} K \neq 2$.

Przypomnienie

Mówimy, że forma kwadratowa $q : V \to K$ **reprezentuje** element $a \in K$, jeśli istnieje $0 \neq v \in V$ taki, że $q(v) = a$. Podzbiór elementów K reprezentowanych przez formę q oznaczamy przez $D_K(q)$ i nazywamy **zbiorem wartości formy** q. Jeśli $D_K(q) \supseteq K \setminus \{0\}$, wówczas formę q nazywamy **uniwersalną**.

Uwaga: w dalszym ciągu wykładamy, że $\operatorname{char} K \neq 2$.

Przypomnienie

Mówimy, że forma kwadratowa $q : V \to K$ **reprezentuje** element $a \in K$, jeśli istnieje $0 \neq v \in V$ taki, że $q(v) = a$. Podzbiór elementów K reprezentowanych przez formę q oznaczamy przez $D_K(q)$ i nazywamy **zbiorem wartości formy** q. Jeśli $D_K(q) \supseteq K \setminus \{0\}$, wówczas formę q nazywamy **uniwersalną**.

Definicja

Formę kwadratową $q : V \to K$ nazywamy:

- **nieosobliwą**, jeśli macierze form q są odwracalne (w dowolnej bazie),
- **izotropową**, jeśli $q(v) = 0$, dla pewnego $v \neq 0$,
- **anizotropową**, jeśli nie jest izotropowa,
- **całkowicie zdegenerowaną**, jeśli $q \equiv 0$.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą formą kwadratową na przestrzeni V wymiaru ≥ 2 nad skończonym ciałem K nieparzystej charakterystyki, wówczas q jest uniwersalna.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą formą kwadratową na przestrzeni V wymiaru ≥ 2 nad skończonym ciałem K nieparzystej charakterystyki, wówczas q jest uniwersalna.

Dowód (dla $\dim V = 2$, pozostała część jest oczywista).

- Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a wystarczy rozpatrzyć formy nieosobliwe $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ i pokazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \dot{K}$ istnieją $x, y \in K$ takie, że $ax^2 + by^2 = c$.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą formą kwadratową na przestrzeni V wymiaru ≥ 2 nad skończonym ciałem K nieparzystej charakterystyki, wówczas q jest uniwersalna.

Dowód (dla $\dim V = 2$, pozostała część jest oczywista).

- Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a wystarczy rozpatrzyć formy nieosobliwe $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ i pokazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \dot{K}$ istnieją $x, y \in K$ takie, że $ax^2 + by^2 = c$.
- Twierdzimy, że liczba kwadratów w ciele K wynosi $(|K| + 1)/2$. Istotnie, jeśli $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, to mamy $x = y$ lub $x = -y$. Zatem (charakterystyka!) dokładnie dwa różne elementy $\dot{K}$ mają ten sam kwadrat. Dodając do uzyskanego zbioru kwadratów zero dostajemy wzór powyżej.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą formą kwadratową na przestrzeni V wymiaru ≥ 2 nad skończonym ciałem K nieparzystej charakterystyki, wówczas q jest uniwersalna.

Dowód (dla $\dim V = 2$, pozostała część jest oczywista).

- Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a wystarczy rozpatrzyć formy nieosobliwe $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ i pokazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \dot{K}$ istnieją $x, y \in K$ takie, że $ax^2 + by^2 = c$.
- Twierdzimy, że liczba kwadratów w ciele K wynosi $(|K| + 1)/2$. Istotnie, jeśli $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, to mamy $x = y$ lub $x = -y$. Zatem (charakterystyka!) dokładnie dwa różne elementy $\dot{K}$ mają ten sam kwadrat. Dodając do uzyskanego zbioru kwadratów zero dostajemy wzór powyżej.
- Dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnego $c \in K$ wyrażenia ax^2 oraz $c - by^2$ przyjmują zatem po $(|K| + 1)/2$ wartości. A zatem ich zbiory wartości mają część wspólną. Innymi słowy, istnieją $x_0, y_0 \in K$ takie, że $ax_0^2 = c - by_0^2$.

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej:

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2.$$

Istnieją więc dwie klasy równoważności nieosobliwych form kwadratowych n zmiennych nad K, w zależności od tego który element dwuelementowej[a] grupy klas kwadratów ciała K reprezentuje $\det(q)$.

[a] Jasne: $|K| - 1$ elementów $\dot{K}$ dzielimy na dwa podzbiory równej mocy: kwadraty (połowa) oraz kwadraty przemnożone przez ustalony nie-kwadrat. Innymi słowy $|\dot{K}/\dot{K}^2| = 2$.

W szczególności każda macierz kwadratowa A rozmiaru n nad ciałem skończonym K nieparzystej charakterystyki jest kongruentna (nad K) do macierzy

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, \det A).$$

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2$.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Niech $n \geq 2$ i niech q będzie nieosobliwą formą kwadratową o n zmiennych.

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2$.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Niech $n \geq 2$ i niech q będzie nieosobliwą formą kwadratową o n zmiennych.

- Wiemy już, że q jest uniwersalna. Zatem $q(\alpha_1) = 1$, dla pewnego $\alpha_1 \neq 0$. Dopełniamy α_1 do bazy ortogonalnej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V i mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, dla pewnych $a_2, \ldots, a_n \neq 0$.

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2$.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Niech $n \geq 2$ i niech q będzie nieosobliwą formą kwadratową o n zmiennych.

- Wiemy już, że q jest uniwersalna. Zatem $q(\alpha_1) = 1$, dla pewnego $\alpha_1 \neq 0$. Dopełniamy α_1 do bazy ortogonalnej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V i mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, dla pewnych $a_2, \ldots, a_n \neq 0$.
- Forma q ograniczona do $V' = \mathrm{lin}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest nieosobliwa i stosując do niej założenie indukcyjne dostajemy bazę ortogonalną $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ taką, że: $q|_{V'}(x_2\alpha'_2 + \ldots + x_n\alpha'_n) = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$, gdzie $d = \det(q|_{V'})$.

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2$.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Niech $n \geq 2$ i niech q będzie nieosobliwą formą kwadratową o n zmiennych.

- Wiemy już, że q jest uniwersalna. Zatem $q(\alpha_1) = 1$, dla pewnego $\alpha_1 \neq 0$. Dopełniamy α_1 do bazy ortogonalnej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V i mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, dla pewnych $a_2, \ldots, a_n \neq 0$.
- Forma q ograniczona do $V' = \mathrm{lin}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest nieosobliwa i stosując do niej założenie indukcyjne dostajemy bazę ortogonalną $\alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ taką, że: $q|_{V'}(x_2\alpha_2' + \ldots + x_n\alpha_n') = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$, gdzie $d = \det(q|_{V'})$.
- Oczywiście $\det(q) = \det(q|_{V'}) \cdot 1$, zaś w bazie $\alpha_1, \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ przestrzeni V mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$. Czyli to koniec?

Twierdzenie

Każda nieosobliwa forma kwadratowa na n -wymiarowej przestrzeni V nad ciałem skończonym nieparzystej charakterystyki K jest równoważna nad K do formy kwadratowej $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \det(q)x_n^2$.

Dowód. Indukcja ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest jasna. Niech $n \geq 2$ i niech q będzie nieosobliwą formą kwadratową o n zmiennych.

- Wiemy już, że q jest uniwersalna. Zatem $q(\alpha_1) = 1$, dla pewnego $\alpha_1 \neq 0$. Dopełniamy α_1 do bazy ortogonalnej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V i mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_n^2$, dla pewnych $a_2, \ldots, a_n \neq 0$.
- Forma q ograniczona do $V' = \mathrm{lin}(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest nieosobliwa i stosując do niej założenie indukcyjne dostajemy bazę ortogonalną $\alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ taką, że: $q|_{V'}(x_2\alpha_2' + \ldots + x_n\alpha_n') = x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$, gdzie $d = \det(q|_{V'})$.
- Oczywiście $\det(q) = \det(q|_{V'}) \cdot 1$, zaś w bazie $\alpha_1, \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ przestrzeni V mamy $q(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$. Czyli to koniec?
- Tak, to koniec (np. z tw. Witta o skracaniu).

Uwaga: w dalszym ciągu wykładamy, że $\operatorname{char} K \neq 2$. Wskażemy teraz kilka równoważnych powodów, dla których forma kwadratowa może być uniwersalna. Zacznijmy od zdefiniowania formy, która jest w sposób oczywisty uniwersalna.

Definicja

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nazywamy **płaszczyzną hiperboliczną**, ozn. $\mathbb{H}$, jeśli forma kwadratowa q odpowiadająca formie h jest równoważna formie postaci

$$q'(x, y) = x^2 - y^2,$$

czyli (równoważnie) gdy macierz formy h ma w pewnej bazie postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście oznacza to, że forma q jest równoważna także formie $q''(x, y) = 2xy$, czyli jest ona uniwersalna nad K.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą izotropową formą kwadratową na V i $q(u) = 0$, dla pewnego $0 \neq u \in V$, to istnieje $v \in V$ taki, że $W = \mathrm{lin}(u, v) \subseteq V$ jest izometryczna z $\mathbb{H}$, czyli $(W, q|_W) \cong \mathbb{H}$. W szczególności forma kwadratowa q jest uniwersalna.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą izotropową formą kwadratową na V i $q(u) = 0$, dla pewnego $0 \neq u \in V$, to istnieje $v \in V$ taki, że $W = \mathrm{lin}(u, v) \subseteq V$ jest izometryczna z $\mathbb{H}$, czyli $(W, q|_W) \cong \mathbb{H}$. W szczególności forma kwadratowa q jest uniwersalna.

Dowód.

- Niech h będzie formą dwuliniową symetryczną odpowiadającą formie q i niech $h(u, u) = 0$, dla pewnego niezerowego $u \in V$. Skoro q jest nieosobliwa, to istnieje $w \in V$, że $h(u, w) \neq 0$.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą izotropową formą kwadratową na V i $q(u) = 0$, dla pewnego $0 \neq u \in V$, to istnieje $v \in V$ taki, że $W = \mathrm{lin}(u, v) \subseteq V$ jest izometryczna z $\mathbb{H}$, czyli $(W, q|_W) \cong \mathbb{H}$. W szczególności forma kwadratowa q jest uniwersalna.

Dowód.

- Niech h będzie formą dwuliniową symetryczną odpowiadającą formie q i niech $h(u, u) = 0$, dla pewnego niezerowego $u \in V$. Skoro q jest nieosobliwa, to istnieje $w \in V$, że $h(u, w) \neq 0$.
- Oczywiście u, w są liniowo niezależne i zastępując w przez skalarną wielokrotność możemy zakładać, że $h(u, w) = 1$.

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą izotropową formą kwadratową na V i $q(u) = 0$, dla pewnego $0 \neq u \in V$, to istnieje $v \in V$ taki, że $W = \mathrm{lin}(u, v) \subseteq V$ jest izometryczna z $\mathbb{H}$, czyli $(W, q|_W) \cong \mathbb{H}$. W szczególności forma kwadratowa q jest uniwersalna.

Dowód.

- Niech h będzie formą dwuliniową symetryczną odpowiadającą formie q i niech $h(u, u) = 0$, dla pewnego niezerowego $u \in V$. Skoro q jest nieosobliwa, to istnieje $w \in V$, że $h(u, w) \neq 0$.
- Oczywiście u, w są liniowo niezależne i zastępując w przez skalarną wielokrotność możemy zakładać, że $h(u, w) = 1$.
- Biorąc $v = au + w$, gdzie $a \in K$ mamy

$$q(v) = q(au + w) = a^2 \cdot q(u) + 2a \cdot h(u, w) + q(w) = 2a + q(w).$$

Fakt

Jeśli q jest nieosobliwą izotropową formą kwadratową na V i $q(u) = 0$, dla pewnego $0 \neq u \in V$, to istnieje $v \in V$ taki, że $W = \mathrm{lin}(u, v) \subseteq V$ jest izometryczna z $\mathbb{H}$, czyli $(W, q|_W) \cong \mathbb{H}$. W szczególności forma kwadratowa q jest uniwersalna.

Dowód.

- Niech h będzie formą dwuliniową symetryczną odpowiadającą formie q i niech $h(u, u) = 0$, dla pewnego niezerowego $u \in V$. Skoro q jest nieosobliwa, to istnieje $w \in V$, że $h(u, w) \neq 0$.
- Oczywiście u, w są liniowo niezależne i zastępując w przez skalarną wielokrotność możemy zakładać, że $h(u, w) = 1$.
- Biorąc $v = au + w$, gdzie $a \in K$ mamy
$$q(v) = q(au + w) = a^2 \cdot q(u) + 2a \cdot h(u, w) + q(w) = 2a + q(w).$$
- Biorąc a takie, że $0 = 2a + q(w)$ mamy $q(u) = q(v) = 0$ oraz $h(u, v) = h(u, au + w) = aq(u) + h(u, w) = 1$. Zatem $(\mathrm{lin}(u, v), q|_{\mathrm{lin}(u,v)}) \cong \mathbb{H}$.

Uwaga. Nieosobliwa uniwersalna forma kwadratowa nie musi być izotropowa. Przykład: bierzemy $V = (\mathbb{Z}_3)^2$ oraz formę

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Istotnie: $q(1, 0) = 1$, $q(1, 1) = 2$, ale $x^2 + y^2 = 0 \bmod 3 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \bmod 3$.

Uwaga. Nieosobliwa uniwersalna forma kwadratowa nie musi być izotropowa. Przykład: bierzemy $V = (\mathbb{Z}_3)^2$ oraz formę

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Istotnie: $q(1,0) = 1$, $q(1,1) = 2$, ale $x^2 + y^2 = 0 \bmod 3 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \bmod 3$.

* * *

A czy istnieje kontrprzykład dla formy wymiernej? Tak, ale uzasadnienie wymaga poważnych wyników. Rozważmy formę kwadratową q na $\mathbb{Q}^4$ zadaną wzorem:

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 7t^2.$$

Okazuje, że jest ona uniwersalna. Aby to pokazać trzeba skorzystać z twierdzenia Hassego-Minkowskiego, którego (choćby) sformułowanie jest celem przyszłego wykładu. Natomiast forma ta nie jest izotropowa. Jak się okazuje, nie reprezentuje ona 7. Wynika to (choćby) z następującego faktu...

Wniosek

Nieosobliwa forma kwadratowa $q(x_1, \ldots, x_n)$ na przestrzeni K^n reprezentuje element $\gamma \in \dot{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma $q' : K^{n+1} \to K$ określona wzorem:

$$q'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -\gamma \cdot {x_0}^2 + q(x_1, \ldots, x_n)$$

jest izotropowa.

Wniosek

Nieosobliwa forma kwadratowa $q(x_1, \ldots, x_n)$ na przestrzeni K^n reprezentuje element $\gamma \in \dot{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma $q' : K^{n+1} \to K$ określona wzorem:

$$q'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -\gamma \cdot {x_0}^2 + q(x_1, \ldots, x_n)$$

jest izotropowa.

Dowód. Oczywiście jeśli $q(x_1, \ldots, x_n) = \gamma$ oraz $x_0 = 1$, to $q'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, czyli forma q' jest izotropowa. Z drugiej strony, jeśli $q'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, dla pewnych $x_i \in K$, nie wszystkich równych 0, to albo $x_0 \neq 0$ i wtedy mamy po prostu $q(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = \gamma$, albo $x_0 = 0$ i wobec tego także forma q jest izotropowa, a więc zgodnie z poprzednim faktem, q jest uniwersalna (czyli reprezentuje γ).

Wniosek

Nieosobliwa forma kwadratowa $q(x_1, \dots, x_n)$ na przestrzeni K^n reprezentuje element $\gamma \in \dot{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma $q' : K^{n+1} \to K$ określona wzorem:

$$q'(x_0, x_1, \dots, x_n) = -\gamma \cdot {x_0}^2 + q(x_1, \dots, x_n)$$

jest izotropowa.

Dowód. Oczywiście jeśli $q(x_1, \dots, x_n) = \gamma$ oraz $x_0 = 1$, to $q'(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, czyli forma q' jest izotropowa. Z drugiej strony, jeśli $q'(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, dla pewnych $x_i \in K$, nie wszystkich równych 0, to albo $x_0 \neq 0$ i wtedy mamy po prostu $q(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) = \gamma$, albo $x_0 = 0$ i wobec tego także forma q jest izotropowa, a więc zgodnie z poprzednim faktem, q jest uniwersalna (czyli reprezentuje γ).

Wróćmy teraz do formy $x^2 + y^2 + z^2 - 7z^2$ na $\mathbb{Q}^4$. Gdyby była ona izotropowa, to **forma wymierna** $x^2 + y^2 + z^2$ reprezentowałaby 7, zgodnie z Wnioskiem wyżej. Stąd wynikałoby (jak?), że 7 to suma trzech kwadratów **liczb całkowitych...**

Dygresja o wielomianach wyższych stopni (bo poprzedni lemat przypomina nieco *trik Rabinowicza* z dopisaniem zmiennej w dowodzie Nullstellensatz Hilberta).

Twierdzenie Chevalleya-Warninga

Niech K będzie ciałem skończonym i niech $f_1, \ldots, f_r$ będą wielomianami zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach w K takimi, których suma stopni jest mniejsza niż n[a]. Wówczas jeśli układ

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad f_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (*)$$

ma rozwiązanie $(0, \ldots, 0) \in K^n$, to ma on również niezerowe rozwiązanie. Dokładniej, liczba rozwiązań tego układu jest podzielne przez $\operatorname{char} K$.

---

[a]Wkrótce będziemy mówić o wielomianach n zmiennych. Dla niezerowego $a \in K$ stopień jednomianu $ax_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}$ określamy jako $t_1 + \ldots + t_n$, zaś stopień wielomianu to największy ze stopni jednomianów w jego nośniku. Tw. Ch-W. można wyprowadzić na przykład z lubianego kombinatorycznego Nullstellensatz i ma ono liczne ważne zastosowania, patrz np. J. Witaszek: *Twierdzenie Chevalleya-Warninga i grafy p-regularne* (dostępny online na stronach Delty).

Definicja

Niech $V_1, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni dwuliniowej (V, h). Powiemy, że V jest **sumą ortogonalną** postaci $V_1 \perp V_2 \perp \ldots \perp V_n$, jeśli

- $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$,
- $V_i \perp V_j$, dla $i \neq j$.

Definicja

Niech $V_1, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni dwuliniowej (V, h). Powiemy, że V jest **sumą ortogonalną** postaci $V_1 \perp V_2 \perp \ldots \perp V_n$, jeśli

- $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$,
- $V_i \perp V_j$, dla $i \neq j$.

Definicja

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nazwiemy **hiperboliczną**, jeśli jest izometryczna z sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych.

Definicja

Niech $V_1, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni dwuliniowej (V, h). Powiemy, że V jest **sumą ortogonalną** postaci $V_1 \perp V_2 \perp \ldots \perp V_n$, jeśli

- $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$,
- $V_i \perp V_j$, dla $i \neq j$.

Definicja

Przestrzeń dwuliniową (V, h) nazwiemy **hiperboliczną**, jeśli jest izometryczna z sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych.

Przykłady.

- Przestrzeń $(\mathbb{R}^4, h)$, gdzie $q(v) = h(v, v)$ oraz $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ jest hiperboliczna, a dokładniej $(\mathbb{R}^4, h) \cong \mathbb{H} \perp \mathbb{H}$.
- W $(\mathbb{R}^5, h)$, gdzie $q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2$ mamy rozkład

$$(\mathbb{R}^5, h) \cong \mathbb{H} \perp (\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle_{st}).$$

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Humorystyczna interpretacja. Twierdzenie Witta o trzech prostopadłych światach.

- $V^{\perp}$ – tu każdy przeczy i sobie, i całemu światu ($V^{\perp}$ nazywamy **radykałem** V);
- H – każdemu kto nie wie co ze sobą zrobić można jednoznacznie wyznaczyć kogoś podobnego do pary i wynik jest niezły, choć w zasadzie ten sam ($\cong \mathbb{H}$);
- V' – każdy wie czego chce i nadaje całości charakter ($V \cong W \Rightarrow V' \cong W'$).

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Dowód, gdy V jest nieosobliwa (reszta jest jasna). Indukcja ze względu na $\dim V$. Przyjmujemy, że $\{0\}$ jest przestrzenią anizotropową.

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Dowód, gdy V jest nieosobliwa (reszta jest jasna). Indukcja ze względu na $\dim V$. Przyjmujemy, że $\{0\}$ jest przestrzenią anizotropową.

- Przestrzeń nieosobliwa wymiaru 1 jest anizotropowa.

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Dowód, gdy V jest nieosobliwa (reszta jest jasna). Indukcja ze względu na $\dim V$. Przyjmujemy, że $\{0\}$ jest przestrzenią anizotropową.

- Przestrzeń nieosobliwa wymiaru 1 jest anizotropowa.
- Niech $\dim V = n \geq 2$. Jeśli V jest anizotropowa, to nie ma czego dowodzić. Jeśli zaś V jest nieosobliwa i izotropowa, to pokazaliśmy już, że V zawiera podprzestrzeń W wymiaru 2 taką, że $(W, h|_W) \cong \mathbb{H}$.

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Dowód, gdy V jest nieosobliwa (reszta jest jasna). Indukcja ze względu na $\dim V$. Przyjmujemy, że $\{0\}$ jest przestrzenią anizotropową.

- Przestrzeń nieosobliwa wymiaru 1 jest anizotropowa.
- Niech $\dim V = n \geq 2$. Jeśli V jest anizotropowa, to nie ma czego dowodzić. Jeśli zaś V jest nieosobliwa i izotropowa, to pokazaliśmy już, że V zawiera podprzestrzeń W wymiaru 2 taką, że $(W, h|_W) \cong \mathbb{H}$.
- Przestrzeń $W^{\perp}$ jest zerowa lub nieosobliwa. W pierwszym przypadku mamy tezę, bo $\dim V = 2$ i V jest hiperboliczna, zaś w drugim mamy $V \cong \mathbb{H} \perp W^{\perp}$ i korzystamy z założenia indukcyjnego względem przestrzeni nieosobliwej $W^{\perp}$. W ten sposób wykazaliśmy istnienie rozkładu Witta.

Twierdzenie o rozkładzie Witta

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową. Wówczas istnieje rozkład ortogonalny $V = V^{\perp} \perp H \perp V'$, gdzie H jest hiperboliczna (lub $= 0$) oraz V' jest anizotropowa. Co więcej, klasy izometrii H oraz V' są niezmiennikami V.

Aby pokazać jednoznaczność rozkładu Witta potrzebujemy wykorzystać twierdzenie Witta o skracaniu. Jeśli mamy dwa rozkłady przestrzeni nieosobliwej V postaci:

$$V \cong \underbrace{\mathbb{H} \perp \ldots \perp \mathbb{H}}_{r} \perp V' \cong \underbrace{\mathbb{H} \perp \ldots \perp \mathbb{H}}_{s} \perp V'',$$

gdzie V', V'' – anizotropowe oraz $r < s$, to skracając r kopii $\mathbb{H}$ dostalibyśmy równoważność przestrzeni V' z przestrzenią izotropową, co jest niemożliwe.

Z drugiej strony to samo twierdzenie Witta o skracaniu daje nam, że V' jest wyznaczone z dokładnością do izometrii. Dowód jest więc zakończony.

Twierdzenie

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru[a], nie większego niż $(\dim V)/2$. Co więcej, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy V jest hiperboliczna.

[a] Ten część jest prawdziwa także bez nieosobliwości V, co jest nietrudnym ćwiczeniem. Na ćwiczeniach pokazaliśmy prawdziwość tego twierdzenia dla $K = \mathbb{Z}_2$, gdzie płaszczyzny hiperboliczne *rozpinały* pary tworzące dwuosobowy klub i nie należące do żadnego innego.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód.

- Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprz. V i niech $W = U_1 \cap U_2$ oraz niech $W_1 \subseteq U_1, W_2 \subseteq U_2$ spełniają $W \oplus W_1 = U_1$, $W \oplus W_2 = U_2$. Pokażemy, że $W_2 \cap W_1^{\perp} = 0$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód.

- Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprz. V i niech $W = U_1 \cap U_2$ oraz niech $W_1 \subseteq U_1$, $W_2 \subseteq U_2$ spełniają $W \oplus W_1 = U_1$, $W \oplus W_2 = U_2$. Pokażemy, że $W_2 \cap W_1^{\perp} = 0$.
- Niech $v \in W_2 \cap W_1^{\perp}$. Skoro $v \in W_2 \subseteq U_2$, to skoro każdy wektor z U_2 jest prostopadły do wszystkiego w U_2, to $v \in U_2^{\perp} \subseteq W^{\perp}$. Ale w $W^{\perp}$ wszystkie wektory są prostopadłe do całego U_1, więc $v \in U_1^{\perp}$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód.

- Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprz. V i niech $W = U_1 \cap U_2$ oraz niech $W_1 \subseteq U_1$, $W_2 \subseteq U_2$ spełniają $W \oplus W_1 = U_1$, $W \oplus W_2 = U_2$. Pokażemy, że $W_2 \cap W_1^{\perp} = 0$.
- Niech $v \in W_2 \cap W_1^{\perp}$. Skoro $v \in W_2 \subseteq U_2$, to skoro każdy wektor z U_2 jest prostopadły do wszystkiego w U_2, to $v \in U_2^{\perp} \subseteq W^{\perp}$. Ale w $W^{\perp}$ wszystkie wektory są prostopadłe do całego U_1, więc $v \in U_1^{\perp}$.
- Skoro U_1 jest maksymalną podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną, to $U_1^{\perp} \setminus U_1$ nie moze zawierać wektorów izotropowych. Stąd $v \in U_1$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód.

- Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprz. V i niech $W = U_1 \cap U_2$ oraz niech $W_1 \subseteq U_1$, $W_2 \subseteq U_2$ spełniają $W \oplus W_1 = U_1$, $W \oplus W_2 = U_2$. Pokażemy, że $W_2 \cap W_1^{\perp} = 0$.
- Niech $v \in W_2 \cap W_1^{\perp}$. Skoro $v \in W_2 \subseteq U_2$, to skoro każdy wektor z U_2 jest prostopadły do wszystkiego w U_2, to $v \in U_2^{\perp} \subseteq W^{\perp}$. Ale w $W^{\perp}$ wszystkie wektory są prostopadłe do całego U_1, więc $v \in U_1^{\perp}$.
- Skoro U_1 jest maksymalną podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną, to $U_1^{\perp} \setminus U_1$ nie moze zawierać wektorów izotropowych. Stąd $v \in U_1$.
- Skoro $W_2 \subseteq U_2$, to $v \in U_1 \cap U_2 = W$, a skoro $W \cap W_2 = \{0\}$, to $v = 0$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód, cd. V jest nieosobliwa. Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprzestrzeniami w V.

- Skoro więc $W_2 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$, to $\dim W_2 + \dim W_1^{\perp} \leq \dim V$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód, cd. V jest nieosobliwa. Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprzestrzeniami w V.

- Skoro więc $W_2 \cap W_1^\perp = \{0\}$, to $\dim W_2 + \dim W_1^\perp \leq \dim V$.
- Zakładamy, że V jest nieosobliwa, więc

$$\dim W_1 = \dim V - \dim W_1^\perp$$

(było na ćwiczeniach!), więc $\dim W_2 \leq \dim W_1$. Z symetrycznych powodów $\dim W_1 \leq \dim W_2$. Stąd $\dim W_1 = \dim W_2$, czyli $\dim U_1 = \dim U_2$.

Twierdzenie, część 1

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$.

Dowód, cd. V jest nieosobliwa. Niech U_1, U_2 będą maksymalnymi całkowicie zdegenerowanymi podprzestrzeniami w V.

- Skoro więc $W_2 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$, to $\dim W_2 + \dim W_1^{\perp} \leq \dim V$.
- Zakładamy, że V jest nieosobliwa, więc

  $$\dim W_1 = \dim V - \dim W_1^{\perp}$$

  (było na ćwiczeniach!), więc $\dim W_2 \leq \dim W_1$. Z symetrycznych powodów $\dim W_1 \leq \dim W_2$. Stąd $\dim W_1 = \dim W_2$, czyli $\dim U_1 = \dim U_2$.
- Oczywiście $\dim U_1 = \dim U_2 \leq (\dim V)/2$, bo V jest nieosobliwa i stosujemy ponownie lemat z ćwiczeń, pamiętając, że $U_1 \subseteq U_1^{\perp}$, $U_2 \subseteq U_2^{\perp}$.

Twierdzenie

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$. Co więcej, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy V jest hiperboliczna.

Dowód, cd 2. Wymiar całkowicie zdegenerowanej podprzestrzeni przestrzeni nieosobliwej (V, h) równy jest $(\dim V)/2$ wtw, gdy V jest hiperboliczna.

- Jeśli V jest hiperboliczna, to oczywiście zawiera podprzestrzeń całkowicie zdegenerowaną wymiaru $(\dim V)/2$.

Twierdzenie

Wszystkie maksymalne (ze względu częściowy porządek inkluzji) podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) nad ciałem K są tego samego wymiaru, nie większego niż $(\dim V)/2$. Co więcej, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy V jest hiperboliczna.

Dowód, cd 2. Wymiar całkowicie zdegenerowanej podprzestrzeni przestrzeni nieosobliwej (V, h) równy jest $(\dim V)/2$ wtw, gdy V jest hiperboliczna.

- Jeśli V jest hiperboliczna, to oczywiście zawiera podprzestrzeń całkowicie zdegenerowaną wymiaru $(\dim V)/2$.
- Odwrotnie, niech U będzie całkowicie zdegenerowana w (V, h) o bazie $u_1, \ldots, u_m$. Wiemy, że istnieje $u_1' \in V \setminus U$ taki, że $\mathrm{lin}(u_1, u_1') \cong \mathbb{H}$. Zatem przez łatwą indukcję pokazuje się, że w istocie V zawiera m ortogonalnych kopii $\mathbb{H}$. Jeśli $m = (\dim V)/2$, to mamy równość i V jest hiperboliczna.

Dalsze kierunki badania form kwadratowych – grupa (i pierścień) Witta ciała K.

Dalsze kierunki badania form kwadratowych – grupa (i pierścień) Witta ciała K.

- Twierdzenie Witta mówi, że formy kwadratowe q_1, q_2 nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ są równoważne tylko wtedy, gdy ich tzw. **jądra anizotropowe** $w(q_1)$, $w(q_2)$ pochodzące z rozkładu Witta są równoważne.

Dalsze kierunki badania form kwadratowych – grupa (i pierścień) Witta ciała K.

- Twierdzenie Witta mówi, że formy kwadratowe q_1, q_2 nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ są równoważne tylko wtedy, gdy ich tzw. **jądra anizotropowe** $w(q_1)$, $w(q_2)$ pochodzące z rozkładu Witta są równoważne.
- Z twierdzenia Witta bezpośrednio wynika, że $w(q_1 \perp q_2) \cong w(w(q_1) \perp w(q_2))$ (można traktować q_1, q_2 jako obcięcia wspólnej formy do $\perp$ poprzestrzeni).

Dalsze kierunki badania form kwadratowych – grupa (i pierścień) Witta ciała K.

- Twierdzenie Witta mówi, że formy kwadratowe q_1, q_2 nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ są równoważne tylko wtedy, gdy ich tzw. **jądra anizotropowe** $w(q_1)$, $w(q_2)$ pochodzące z rozkładu Witta są równoważne.
- Z twierdzenia Witta bezpośrednio wynika, że $w(q_1 \perp q_2) \cong w(w(q_1) \perp w(q_2))$ (można traktować q_1, q_2 jako obcięcia wspólnej formy do $\perp$ poprzestrzeni).
- Wprowadzając na klasach form równoważnych nad K operację dwuargumentową:
$$[q_1] + [q_2] := w[q_1 \perp q_2]$$
dostajemy w istocie strukturę tzw. **grupy Witta** $W(K)$ **ciała** K. Na przykład: dla każdej formy q o n zmiennych: $[q] + [-q] = n \cdot w[\mathbb{H}] = [0]$, zaś sama forma/przestrzeń zerowa jest anizotropowa (tak formalnie przyjmujemy).

Dalsze kierunki badania form kwadratowych – grupa (i pierścień) Witta ciała K.

- Twierdzenie Witta mówi, że formy kwadratowe q_1, q_2 nad ciałem charakterystyki $\neq 2$ są równoważne tylko wtedy, gdy ich tzw. **jądra anizotropowe** $w(q_1)$, $w(q_2)$ pochodzące z rozkładu Witta są równoważne.
- Z twierdzenia Witta bezpośrednio wynika, że $w(q_1 \perp q_2) \cong w(w(q_1) \perp w(q_2))$ (można traktować q_1, q_2 jako obcięcia wspólnej formy do $\perp$ poprzestrzeni).
- Wprowadzając na klasach form równoważnych nad K operację dwuargumentową:
$$[q_1] + [q_2] := w[q_1 \perp q_2]$$
dostajemy w istocie strukturę tzw. **grupy Witta** $W(K)$ **ciała** K. Na przykład: dla każdej formy q o n zmiennych: $[q] + [-q] = n \cdot w[\mathbb{H}] = [0]$, zaś sama forma/przestrzeń zerowa jest anizotropowa (tak formalnie przyjmujemy).
- Proste ćwiczenia: jeśli K jest algebraicznie domknięte, to $|W(K)| = 2$. Jeśli K jest skończone charakterystyki $p \neq 2$, to $|W(K)| = 4$. Natomiast $W(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$.