Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 13, 23.04.2021 r.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Funkcjonał $\langle \mid \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ nazywamy **iloczynem hermitowskim** (lub **półtoraliniowym**), jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$\begin{array}{ll}
\langle a\alpha + b\beta \mid \gamma \rangle = a\langle \alpha \mid \gamma \rangle + b\langle \beta \mid \gamma \rangle & \text{liniowość wzgl. pierwszej zmiennej,} \\
\langle \alpha \mid c\gamma + d\delta \rangle = \overline{c}\langle \alpha \mid \gamma \rangle + \overline{d}\langle \alpha \mid \delta \rangle & \textbf{anty}\text{liniowość wzgl. drugiej zmiennej,} \\
\langle \alpha \mid \beta \rangle = \overline{\langle \beta \mid \alpha \rangle} & \text{hermitowska symetria,} \\
\alpha \neq 0 \Rightarrow \langle \alpha \mid \alpha \rangle \in \mathbb{R}_+ & \text{dodatnia określoność.}
\end{array}$$

Parę $(V, \langle \mid \rangle)$, gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz $\langle \mid \rangle$ jest iloczynem hermitowskim nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Funkcjonał $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ nazywamy **iloczynem hermitowskim** (lub **półtoraliniowym**), jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$\langle\, a\alpha + b\beta \mid \gamma \,\rangle = a\langle\, \alpha \mid \gamma \,\rangle + b\langle\, \beta \mid \gamma \,\rangle$	liniowość wzgl. pierwszej zmiennej,
$\langle\, \alpha \mid c\gamma + d\delta \,\rangle = \overline{c}\langle\, \alpha \mid \gamma \,\rangle + \overline{d}\langle\, \alpha \mid \delta \,\rangle$	**anty**liniowość wzgl. drugiej zmiennej,
$\langle\, \alpha \mid \beta \,\rangle = \overline{\langle\, \beta \mid \alpha \,\rangle}$	hermitowska symetria,
$\alpha \neq 0 \Rightarrow \langle\, \alpha \mid \alpha \,\rangle \in \mathbb{R}_+$	dodatnia określoność.

Parę $(V, \langle\ |\ \rangle)$, gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz $\langle\ |\ \rangle$ jest iloczynem hermitowskim nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Standardowy iloczyn hermitowski $\langle\ |\ \rangle_{st}$ na $\mathbb{C}^n$ określamy wzorem:

$$\langle\, (z_1, \ldots, z_n) \mid (z'_1, \ldots z'_n) \,\rangle_{st} = z_1\overline{z'_1} + \ldots + z_n\overline{z'_n}.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$. Funkcjonał $\langle \mid \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ nazywamy **iloczynem hermitowskim** (lub **półtoraliniowym**), jeśli dla każdych $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ i $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$\langle a\alpha + b\beta \mid \gamma \rangle = a\langle \alpha \mid \gamma \rangle + b\langle \beta \mid \gamma \rangle$$ liniowość wzgl. pierwszej zmiennej,

$$\langle \alpha \mid c\gamma + d\delta \rangle = \overline{c}\langle \alpha \mid \gamma \rangle + \overline{d}\langle \alpha \mid \delta \rangle$$ **anty**liniowość wzgl. drugiej zmiennej,

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = \overline{\langle \beta \mid \alpha \rangle}$$ hermitowska symetria,

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow \langle \alpha \mid \alpha \rangle \in \mathbb{R}_+$$ dodatnia określoność.

Parę $(V, \langle \mid \rangle)$, gdzie V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz $\langle \mid \rangle$ jest iloczynem hermitowskim nazywamy **przestrzenią unitarną**.

Definicja

Dla każdego $v \in V$ liczbę $\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$ nazywamy **normą** wektora v.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią nad $\mathbb{C}$ oraz niech $\langle \mid \rangle$ będzie formą hermitowską na V. Wektory $v, w \in V$ nazywamy **prostopadłymi**, jeśli $\langle v \mid w \rangle = 0$, ozn. $v \perp w$.

Zauważmy, że prostopadłość jest pojęciem symetrycznym:

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle \beta \mid \alpha \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \beta \mid \alpha \rangle = 0.$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią nad $\mathbb{C}$ oraz niech $\langle\ |\ \rangle$ będzie formą hermitowską na V. Wektory $v, w \in V$ nazywamy **prostopadłymi**, jeśli $\langle\, v \mid w \,\rangle = 0$, ozn. $v \perp w$.

Zauważmy, że prostopadłość jest pojęciem symetrycznym:

$$\langle\, \alpha \mid \beta \,\rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle\, \beta \mid \alpha \,\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle\, \beta \mid \alpha \,\rangle = 0.$$

Definicja

Układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni V z formą hermitowską $\langle\ |\ \rangle$ nazywamy

- **ortogonalnym**, jeśli $\langle\, \alpha_i \mid \alpha_j \,\rangle = 0$, dla $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$,
- **ortonormalnym**, jeśli jest ortogonalny i $\langle\, \alpha_i \mid \alpha_i \,\rangle = 1$, dla $i = 1, \ldots, n$.

Dla podzbioru $S \subseteq V$ przez $S^{\perp}$ rozumiemy podprzestrzeń liniową złożoną ze wszystkich wektorów z V prostopadłych do wszystkich wektorów ze zbioru S.

Uwaga

Niech V będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}$ oraz niech $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Wówczas wszystkie formy hermitowskie na V opisane są wzorami:

$$\langle\, (x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) \mid (y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n)\,\rangle = \sum_{i,j}^{n} x_i\overline{y_j} \cdot \langle\, \alpha_i \mid \alpha_j \,\rangle.$$

Innymi słowy, jeśli $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, gdzie $a_{ij} = \langle\, \alpha_i \mid \alpha_j \,\rangle$, to dla każdych

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n, \quad \beta = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$$

zachodzi następująca równość: $\langle\, \alpha \mid \beta \,\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{bmatrix}.$

Przykład. Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^3, \langle\ |\ \rangle)$ z formą hermitowską zadaną wzorem:

$$\langle\, (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)\, \rangle = -x_1 y_1 - 2i x_1 y_3 + 2x_2 y_2 + 2i x_3 y_1 - x_3.$$

Wówczas $(1, 0, i) \perp (i, 0, 1)$, bo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 2i & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Co więcej, układ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \quad (0, 1, 0), \quad \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

stanowi bazę ortonormalną $(\mathbb{C}^3, \langle\ |\ \rangle)$ i mamy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 2i & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza V. **Macierzą formy** $\langle \mid \rangle$ **w bazie** $\mathcal{A}$ nazywamy macierz: $G(\langle \mid \rangle; \mathcal{A}) = [\langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle] \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicja

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza V. **Macierzą formy** $\langle \mid \rangle$ **w bazie** $\mathcal{A}$ nazywamy macierz: $G(\langle \mid \rangle; \mathcal{A}) = [\langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle] \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ spełniającą dla każdych i, j warunek $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (co zapisujemy też[a]: $A = \overline{A^T}$) nazywamy macierzą **hermitowską**.

[a] Macierz $\overline{A^T} = [\overline{a_{ji}}]$ nazywamy **sprzężeniem hermitowskim** macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicja

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna, zaś $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – baza V. **Macierzą formy** $\langle \mid \rangle$ **w bazie** $\mathcal{A}$ nazywamy macierz: $G(\langle \mid \rangle; \mathcal{A}) = [\langle \alpha_i \mid \alpha_j \rangle] \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ spełniającą dla każdych i, j warunek $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (co zapisujemy też[a]: $A = \overline{A^T}$) nazywamy macierzą **hermitowską**.

[a] Macierz $\overline{A^T} = [\overline{a_{ji}}]$ nazywamy **sprzężeniem hermitowskim** macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$.

Definicja

Niech $(V_1, \langle \mid \rangle_1)$, $(V_2, \langle \mid \rangle_2)$ będą przestrzeniami unitarnymi. Izomorfizm $\phi : V_1 \to V_2$ nazywamy **przekształceniem unitarnym**, jeżeli zachowuje iloczyn hermitowski, tj. dla każdych $\alpha, \beta \in V_1$ mamy: $\langle \alpha \mid \beta \rangle_1 = \langle \phi(\alpha) \mid \phi(\beta) \rangle_2$.

Macierz $M \in M_n(\mathbb{C})$ nazywamy **unitarną**, jeśli $M \cdot \overline{M}^T = \overline{M}^T \cdot M = I_n$.

Wiele twierdzeń przenosi się łatwo z przestrzeni euklidesowych na unitarne:

- (twierdzenie Pitagorasa) Jeśli u, v są prostopadłe, to $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
- (nierówność Schwarza) Jeśli $u, v \in V$, to $|\langle\, u \mid v \,\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
- (nierówność trójkąta) Jeśli $u, v \in V$, to $\|u+w\| \leq \|u\| + \|v\|$.
- Układ wektorów ortogonalnych w przestrzeni unitarnej jest liniowo niezależny.
- Dla podprzestrzeni $W \subseteq V$ mamy $V = W \oplus W^{\perp}$ oraz $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
- Każda przestrzeń unitarna ma bazę ortogonalną (i ortonormalną).
- Współrzędne wektora α w bazie ortogonalnej $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ przestrzeni V:
$$\frac{\langle\, \alpha \mid \gamma_1 \,\rangle}{\langle\, \gamma_1 \mid \gamma_1 \,\rangle}, \frac{\langle\, \alpha \mid \gamma_2 \,\rangle}{\langle\, \gamma_2 \mid \gamma_2 \,\rangle}, \quad \dots, \quad \frac{\langle\, \alpha \mid \gamma_n \,\rangle}{\langle\, \gamma_n \mid \gamma_n \,\rangle}.$$
- Twierdzenie o ortogonalizacji Grama-Schmidta (uwaga na kolejność!).
- Kryterium Sylvestera (na bycie macierzą formy hermitowskiej).
- Istnienie endomorfizmu sprzężonego ϕ^* do endomorfizmu ϕ przestrzeni unitarnej V oraz to, że dla każdej bazy $\mathcal{A}$ p-ni V mamy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \overline{(M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^T}$.

Wszystkie dowody można obejrzeć na filmach 22-27 od Sheldona Axlera...

Definicja

Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową lub $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Powiemy, że $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest **normalny**, jeśli zachodzi równość:

$$\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi.$$

Definicja

Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową lub $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Powiemy, że $\phi \in \mathrm{End}(V)$ jest **normalny**, jeśli zachodzi równość:

$$\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi.$$

Przykłady.

- Izometria przestrzeni euklidesowej spełnia $\phi^* = \phi^{-1}$, więc jest normalna, podobnie każde przekształcenie unitarne przestrzeni unitarnej.
- Endomorfizm samosprzężony spełnia $\phi^* = \phi$, czyli jest normalny.
- Endomorfizm $\phi \in \mathbb{R}^3$ zadany macierzą $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest normalny, bo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie spektralne - wersja zespolona

Niech $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) V ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych ϕ,

(2) endomorfizm ϕ jest normalny.

Twierdzenie spektralne - wersja zespolona

Niech $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) V ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych ϕ,

(2) endomorfizm ϕ jest normalny.

Dowód implikacji (1) $\Rightarrow$ (2) jest prosty.

Niech V ma bazę ortonormalną $\mathcal{A}$ wektorów własnych ϕ. Mamy zatem $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = D$ oraz $M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \overline{D}$, gdzie D jest diagonalna. Skoro dowolne dwie macierze diagonalne są przemienne, to ϕ oraz ϕ^* są przemienne, czyli ϕ – normalny.

Widać więc, że definicja endomorfizmu normalnego jest naturalna w kontekście twierdzenia spektralnego.

Twierdzenie spektralne - wersja zespolona

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) V ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych ϕ,

(2) endomorfizm ϕ jest normalny.

Do dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (1) będą potrzebne dwa (lub więcej) fakty:

Twierdzenie spektralne - wersja zespolona

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) V ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych ϕ,

(2) endomorfizm ϕ jest normalny.

Do dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (1) będą potrzebne dwa (lub więcej) fakty:

- Zespolony rozkład QR: każdą macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ można przedstawić w postaci $A = QR$, gdzie Q jest unitarna, zaś R jest górnotrójkątna. Dowód wynika z ortogonalizacji Grama-Schmidta, analogicznie jak na ćwiczeniach (dla przestrzeni euklidesowych).

Twierdzenie spektralne - wersja zespolona

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Następujące warunki są równoważne:

(1) V ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych ϕ,

(2) endomorfizm ϕ jest normalny.

Do dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (1) będą potrzebne dwa (lub więcej) fakty:

- Zespolony rozkład QR: każdą macierz $A \in M_n(\mathbb{C})$ można przedstawić w postaci $A = QR$, gdzie Q jest unitarna, zaś R jest górnotrójkątna. Dowód wynika z ortogonalizacji Grama-Schmidta, analogicznie jak na ćwiczeniach (dla przestrzeni euklidesowych).

- **Lemat pomocniczy.** Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ mamy:
$$\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|.$$

Fakt 1 (na drodze do Lematu pomocniczego)

Jeśli $(V, \langle \mid \rangle)$ jest przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia równość

$$\langle \phi(v) \mid v \rangle = 0,$$

dla każdego $v \in V$, to $\phi = 0$.

Fakt 1 (na drodze do Lematu pomocniczego)

Jeśli $(V, \langle \mid \rangle)$ jest przestrzenią unitarną oraz $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia równość

$$\langle \phi(v) \mid v \rangle = 0,$$

dla każdego $v \in V$, to $\phi = 0$.

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że dla każdego $\phi \in \mathrm{End}(V)$ oraz dla $u, w \in V$ mamy:

$$\langle \phi(u) \mid w \rangle = \frac{\langle \phi(u+w) \mid u+w \rangle - \langle \phi(u-w) \mid u-w \rangle}{4} + \frac{\langle \phi(u+iw) \mid u+iw \rangle - \langle \phi(u-iw) \mid u-iw \rangle}{4} i.$$

Jeśli dla każdego $v \in V$ mamy $\langle \phi(v) \mid v \rangle = 0$, to lewa strona równości wyżej wynosi 0, dla dowolnych $u, w \in V$. Dla $w = \phi(u)$ mamy zatem $\langle \phi(u) \mid \phi(u) \rangle = 0$, czyli $\phi(u) = 0$, dla każdego $u \in V$. Stąd oczywiście $\phi = 0$.

Wniosek - endomorfizmy samosprzężone *są jak* liczby rzeczywiste

Niech $(V, \langle \mid \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Wówczas następujące warunki są równoważne dla $\phi \in \mathrm{End}(V)$:

- ϕ jest samosprzężony, tzn. $\phi = \phi^*$,
- $\langle \phi(v) \mid v \rangle \in \mathbb{R}$ dla każdego $v \in V$.

Wniosek - endomorfizmy samosprzężone *są jak* liczby rzeczywiste

Niech $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Wówczas następujące warunki są równoważne dla $\phi \in \mathrm{End}(V)$:

- ϕ jest samosprzężony, tzn. $\phi = \phi^*$,
- $\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle \in \mathbb{R}$ dla każdego $v \in V$.

Dowód. Niech $v \in V$. Wówczas:

$$\begin{aligned}\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \overline{\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle} &= \langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \langle\, v \mid \phi(v) \,\rangle = \\ &= \langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \langle\, \phi^*(v) \mid v \,\rangle = \\ &= \langle\, (\phi - \phi^*)(v) \mid v \,\rangle.\end{aligned}$$

Wniosek - endomorfizmy samosprzężone *są jak* liczby rzeczywiste

Niech $(V, \langle\ |\ \rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Wówczas następujące warunki są równoważne dla $\phi \in \mathrm{End}(V)$:

- ϕ jest samosprzężony, tzn. $\phi = \phi^*$,
- $\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle \in \mathbb{R}$ dla każdego $v \in V$.

Dowód. Niech $v \in V$. Wówczas:

$$\begin{aligned}\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \overline{\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle} &= \langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \langle\, v \mid \phi(v) \,\rangle = \\ &= \langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle - \langle\, \phi^*(v) \mid v \,\rangle = \\ &= \langle\, (\phi - \phi^*)(v) \mid v \,\rangle.\end{aligned}$$

Jeśli $\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle \in \mathbb{R}$, dla każdego $v \in V$, to lewa strona równości wyżej wynosi 0, czyli także $\langle\, (\phi - \phi^*)(v) \mid v \,\rangle = 0$, dla każdego v. Z wcześniejszego faktu mamy $\phi - \phi^* = 0$, czyli ϕ jest samosprzężony. Jeśli ϕ jest samosprzężony, to prawa strona powyższej równości wynosi 0, czyli $\langle\, \phi(v) \mid v \,\rangle \in \mathbb{R}$, dla każdego v.

Fakt 2 (na drodze do Lematu pomocniczego)

Jeśli $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową oraz przekształcenie samosprzężone[a] $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia równość

$$\langle\, \phi(v), v \,\rangle = 0,$$

dla każdego $v \in V$, to $\phi = 0$.

[a] Istnieją endomorfizmy przestrzeni euklidesowych $\phi \neq 0$, że $\langle\, \phi(v), v \,\rangle = 0$, dla $v \in V$.

Fakt 2 (na drodze do Lematu pomocniczego)

Jeśli $(V, \langle\, , \,\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową oraz przekształcenie samosprzężone[a] $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełnia równość

$$\langle\, \phi(v), v \,\rangle = 0,$$

dla każdego $v \in V$, to $\phi = 0$.

[a] Istnieją endomorfizmy przestrzeni euklidesowych $\phi \neq 0$, że $\langle\, \phi(v), v \,\rangle = 0$, dla $v \in V$.

Dowód. Dla każdych $u, w \in V$ mamy:

$$\langle\, \phi(u), w \,\rangle = \frac{\langle\, \phi(u+w), u+w \,\rangle - \langle\, \phi(u-w), u-w \,\rangle}{4},$$

co wynika z równości:

$$\langle\, \phi(w), u \,\rangle = \langle\, w, \phi(u) \,\rangle = \langle\, \phi(u), w \,\rangle.$$

Jeśli $\langle\, \phi(v), v \,\rangle = 0$, dla każdego $v \in V$, to równość wyżej daje $\langle\, \phi(u), w \,\rangle = 0$, dla wszystkich $u, w \in V$. Czyli $\phi = 0$ (po wzięciu $w = \phi(u)$).

Lemat pomocniczy

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ mamy:

$$\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|.$$

Lemat pomocniczy

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ mamy:

$$\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|.$$

Dowód.

Lemat pomocniczy

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle\ |\ \rangle)$. Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ mamy:

$$\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|.$$

Dowód.

- Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Zauważmy, że $\phi^*\phi - \phi\phi^*$ jest samosprzężony. Mamy zatem (pomijam symbol $\circ$):

$$\begin{aligned} \phi^*\phi - \phi\phi^* = 0 &\Leftrightarrow \langle (\phi^*\phi - \phi\phi^*)(v) \mid v \rangle = 0, \quad \forall_{v \in V} \\ &\Leftrightarrow \langle (\phi^*\phi)(v) \mid v \rangle = \langle (\phi\phi^*)(v) \mid v \rangle, \quad \forall_{v \in V}. \end{aligned}$$

Lemat pomocniczy

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. Wówczas ϕ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v \in V$ mamy:

$$\|\phi(v)\| = \|\phi^*(v)\|.$$

Dowód.

- Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Zauważmy, że $\phi^*\phi - \phi\phi^*$ jest samosprzężony. Mamy zatem (pomijam symbol $\circ$):
$$\begin{aligned}\phi^*\phi - \phi\phi^* = 0 &\Leftrightarrow \langle (\phi^*\phi - \phi\phi^*)(v) \mid v \rangle = 0, \quad \forall_{v\in V}\\ &\Leftrightarrow \langle (\phi^*\phi)(v) \mid v \rangle = \langle (\phi\phi^*)(v) \mid v \rangle, \quad \forall_{v\in V}.\end{aligned}$$
- Z definicji przekształcenia sprzężonego mamy $\langle (\phi^*\phi)(v) \mid v \rangle = \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle$ oraz $\langle (\phi\phi^*)(v) \mid v \rangle = \langle \phi^*(v) \mid \phi^*(v) \rangle$, czyli ostatecznie dla każdego $v \in V$:
$$\langle (\phi^*\phi)(v) \mid v \rangle = \langle (\phi\phi^*)(v) \mid v \rangle \Leftrightarrow \|\phi(v)\|^2 = \|\phi^*(v)\|^2.$$

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- Pokażemy, że powyższe macierze są w istocie diagonalne. Mamy:

$$\|\phi(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2, \quad \|\phi^*(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- Pokażemy, że powyższe macierze są w istocie diagonalne. Mamy:

$$\|\phi(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2, \quad \|\phi^*(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$

- Z lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_1)\| = \|\phi^*(\alpha_1)\|$. Zatem $a_{1j} = 0$, dla $j > 1$.

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- Pokażemy, że powyższe macierze są w istocie diagonalne. Mamy:

$$\|\phi(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2, \quad \|\phi^*(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$

- Z lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_1)\| = \|\phi^*(\alpha_1)\|$. Zatem $a_{1j} = 0,$ dla $j > 1$.
- Zatem: $\|\phi(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2$ oraz $\|\phi^*(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2 + \ldots + |a_{2n}|^2$.

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- Pokażemy, że powyższe macierze są w istocie diagonalne. Mamy:

$$\|\phi(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2, \quad \|\phi^*(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$

- Z lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_1)\| = \|\phi^*(\alpha_1)\|$. Zatem $a_{1j} = 0,$ dla $j > 1$.
- Zatem: $\|\phi(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2$ oraz $\|\phi^*(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2 + \ldots + |a_{2n}|^2$.
- Z Lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_2)\| = \|\phi^*(\alpha_2)\|$, czyli $a_{2j} = 0,$ dla $j > 2$...

Dowód twierdzenia spektralnego (normalność $\Rightarrow$ unitarna diagonalizowalność):

- Załóżmy, że ϕ jest macierzą normalną. Wiadomo, że ϕ jest triangularyzowalny, czyli w pewnej bazie ma macierz górnotrójkątną A. Korzystając z rozkładu $A = QR$ znajdujemy ortonormalną bazę $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V taką, że:
$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$
- Pokażemy, że powyższe macierze są w istocie diagonalne. Mamy:
$$\|\phi(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2, \quad \|\phi^*(\alpha_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2.$$
- Z lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_1)\| = \|\phi^*(\alpha_1)\|$. Zatem $a_{1j} = 0,$ dla $j > 1$.
- Zatem: $\|\phi(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2$ oraz $\|\phi^*(\alpha_2)\|^2 = |a_{22}|^2 + \ldots + |a_{2n}|^2$.
- Z Lematu pomocniczego $\|\phi(\alpha_2)\| = \|\phi^*(\alpha_2)\|$, czyli $a_{2j} = 0,$ dla $j > 2$...
- Analogicznie zerujemy pozycje poza przekątną w kolejnych wierszach $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Twierdzenie - bez dowodu (nie jest trudny)

Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową, oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wówczas następujące warunki są równoważne[a]:

- ϕ jest normalny,
- istnieje baza ortonormalna V, w której macierz ϕ jest blokowo-diagonalna o klatkach wielkości 1×1 lub o klatkach wielkości 2×2 mających postać $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, dla $b > 0$, na przykład:

$$\begin{bmatrix} 4 & & & & \\ & 2 & -3 & & \\ & 3 & 2 & & \\ & & & 1 & -7 \\ & & & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

[a] Warto to sprawdzić choćby dla $\dim V = 2$.

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni unitarnej V (odp. euklidesowej). Powiemy, że ϕ jest

- dodatnio określony, jeśli: $\langle \phi(v) \mid v \rangle > 0$, dla $v \neq 0$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle > 0$),
- dodatnio półokreślony[a], jeśli $\langle \phi(v) \mid v \rangle \geq 0$, dla $v \in V$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle \geq 0$).

Macierze tych endomorfizmów w dowolnej bazie nazywamy odpowiednio dodatnio określonymi oraz dodatnio półokreślonymi (lub nieujemnie określonymi).

[a] Na ćwiczeniach mówiliśmy też: *nieujemnie określony* i tak też niektórzy piszą.

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni unitarnej V (odp. euklidesowej). Powiemy, że ϕ jest

- dodatnio określony, jeśli: $\langle \phi(v) \mid v \rangle > 0$, dla $v \neq 0$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle > 0$),
- dodatnio półokreślony[a], jeśli $\langle \phi(v) \mid v \rangle \geq 0$, dla $v \in V$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle \geq 0$).

Macierze tych endomorfizmów w dowolnej bazie nazywamy odpowiednio dodatnio określonymi oraz dodatnio półokreślonymi (lub nieujemnie określonymi).

[a] Na ćwiczeniach mówiliśmy też: *nieujemnie określony* i tak też niektórzy piszą.

przestrzenie	euklidesowe	unitarne
forma dwuliniowa	iloczyn skalarny	iloczyn hermitowski
macierz formy	symetryczna dod. okr.	hermitowska dod. okr.
macierz izometrii (w bazie orton.)	ortogonalna	unitarna
macierz endom. samosp.	symetryczna	hermitowska

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni unitarnej V (odp. euklidesowej). Powiemy, że ϕ jest

- dodatnio określony, jeśli: $\langle \phi(v) \mid v \rangle > 0$, dla $v \neq 0$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle > 0$),
- dodatnio półokreślony[a], jeśli $\langle \phi(v) \mid v \rangle \geq 0$, dla $v \in V$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle \geq 0$).

Macierze tych endomorfizmów w dowolnej bazie nazywamy odpowiednio dodatnio określonymi oraz dodatnio półokreślonymi (lub nieujemnie określonymi).

[a] Na ćwiczeniach mówiliśmy też: *nieujemnie określony* i tak też niektórzy piszą.

- Jeśli ϕ jest nieujemnie określony i λ jest wartością własną ϕ, to $\lambda \geq 0$, bo:

$$0 \leq \langle \phi(v) \mid v \rangle = \langle \lambda v \mid v \rangle = \lambda \langle v \mid v \rangle.$$

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni unitarnej V (odp. euklidesowej). Powiemy, że ϕ jest

- dodatnio określony, jeśli: $\langle \phi(v) \mid v \rangle > 0$, dla $v \neq 0$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle > 0$),
- dodatnio półokreślony[a], jeśli $\langle \phi(v) \mid v \rangle \geq 0$, dla $v \in V$ (odp. $\langle \phi(v), v \rangle \geq 0$).

Macierze tych endomorfizmów w dowolnej bazie nazywamy odpowiednio dodatnio określonymi oraz dodatnio półokreślonymi (lub nieujemnie określonymi).

[a] Na ćwiczeniach mówiliśmy też: *nieujemnie określony* i tak też niektórzy piszą.

- Jeśli ϕ jest nieujemnie określony i λ jest wartością własną ϕ, to $\lambda \geq 0$, bo:

$$0 \leq \langle \phi(v) \mid v \rangle = \langle \lambda v \mid v \rangle = \lambda \langle v \mid v \rangle.$$

- Jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ stanowią ortonormalną bazę V złożoną z wektorów własnych przekształcenia dodatnio półokreślonego ϕ o wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to definiując $\psi \in \mathrm{End}(V)$ na bazie V warunkami $\psi(\alpha_i) = \sqrt{\lambda_i}\alpha_i$ widzimy, że ψ jest dodatnio półokreślony oraz $\psi^2 = \phi$.

Twierdzenie (przekształcenie nieujemnie określone *jest jak* liczba nieujemna)

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. Następujące warunki są równoważne:

- ϕ jest dodatnio półokreślone,
- ϕ jest samosprzężone i ma nieujemne wartości własne,
- ϕ ma dodatnio półokreślony pierwiastek
- ϕ ma samosprzężony pierwiastek
- istnieje $\psi \in \mathrm{End}(V)$, że $\phi = \psi^* \circ \psi$.

Co więcej każdy dodatnio półokreślony ϕ ma dokładnie jeden dodatnio półokreślony pierwiastek.

Uwaga. Oczywiście dodatnio półokreślone przekształcenie może mieć nieskończenie wiele pierwiastków, np. identyczność na przestrzeni unitarnej wymiaru większego niż 1.

Nieformalne analogie między $\mathbb{C}$ a $\mathsf{End}(V)$, gdzie $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna.

- jeśli $\phi \in \mathsf{End}(V)$ *jest jak* $z \in \mathbb{C}$, to ϕ^* jest jak $\overline{z}$,
- jeśli ϕ jest samosprzężony, to *jest jak* liczba rzeczywista,
- jeśli ϕ jest dodatnio półokreslony, to *jest jak* liczba nieujemna,
- jeśli ϕ jest izometrią, czyli $\phi^*\phi = \mathsf{id}$, to *jest jak* element $|z| = 1$,

Nieformalne analogie między $\mathbb{C}$ a $\mathrm{End}(V)$, gdzie $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna.

- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ *jest jak* $z \in \mathbb{C}$, to ϕ^* jest jak $\overline{z}$,
- jeśli ϕ jest samosprzężony, to *jest jak* liczba rzeczywista,
- jeśli ϕ jest dodatnio półokreslony, to *jest jak* liczba nieujemna,
- jeśli ϕ jest izometrią, czyli $\phi^*\phi = \mathrm{id}$, to *jest jak* element $|z| = 1$,

Dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ mamy rozkład $z = \left(\frac{z}{|z|}\right)|z| = \left(\frac{z}{|z|}\right)\sqrt{\overline{z}z}$, gdzie $z/|z|$ należy do okręgu jednostkowego, a $\overline{z}z$ to liczba nieujemna.

Nieformalne analogie między $\mathbb{C}$ a $\mathrm{End}(V)$, gdzie $(V, \langle \mid \rangle)$ – unitarna.

- jeśli $\phi \in \mathrm{End}(V)$ *jest jak* $z \in \mathbb{C}$, to ϕ^* jest jak $\overline{z}$,
- jeśli ϕ jest samosprzężony, to *jest jak* liczba rzeczywista,
- jeśli ϕ jest dodatnio półokreslony, to *jest jak* liczba nieujemna,
- jeśli ϕ jest izometrią, czyli $\phi^*\phi = \mathrm{id}$, to *jest jak* element $|z| = 1$,

Dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ mamy rozkład $z = \left(\frac{z}{|z|}\right)|z| = \left(\frac{z}{|z|}\right)\sqrt{\overline{z}z}$, gdzie $z/|z|$ należy do okręgu jednostkowego, a $\overline{z}z$ to liczba nieujemna.

Twierdzenie o rozkładzie biegunowym endomorfizmu

Dla dowolnej macierzy $T \in M_n(\mathbb{C})$ (odp. $T \in M_n(\mathbb{R})$) istnieje macierz unitarna (odp. ortogonalna) S taka, że $T = S\sqrt{\overline{T}^T T}$. Innymi słowy każdy endomorfizm ϕ przestrzeni unitarnej (odp. euklidesowej) to złożenie przekształcenia unitarnego ψ (odp. izometrii) i przekształcenia dodatnio półokreślonego $\sqrt{\phi^* \circ \phi}$.

Dowód tw. o rozkładzie biegunowym (pomijam symbol $\circ$).
Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Korzystając z faktu, że $\phi^*\phi$ jest nieujemnie określony (oczywiste) i ma pierwiastek nieujemnie określony dostajemy, dla każdego $v \in V$:

$$\begin{aligned}
\|\phi(v)\|^2 &= \langle\, \phi(v) \mid \phi(v) \,\rangle = \\
&= \langle\, (\phi^*\phi)(v) \mid v \,\rangle = \\
&= \langle\, (\sqrt{\phi^*\phi}\sqrt{\phi^*\phi})(v) \mid v \,\rangle = \\
&= \langle\, (\sqrt{\phi^*\phi})(v) \mid (\sqrt{\phi^*\phi})(v) \,\rangle = \\
&= \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|^2.
\end{aligned}$$

Stąd $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Dowód tw. o rozkładzie biegunowym (pomijam symbol $\circ$).
Niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Korzystając z faktu, że $\phi^*\phi$ jest nieujemnie określony (oczywiste) i ma pierwiastek nieujemnie określony dostajemy, dla każdego $v \in V$:

$$\begin{aligned} \|\phi(v)\|^2 &= \langle\, \phi(v) \mid \phi(v)\,\rangle = \\ &= \langle\, (\phi^*\phi)(v) \mid v\,\rangle = \\ &= \langle\, (\sqrt{\phi^*\phi}\sqrt{\phi^*\phi})(v) \mid v\,\rangle = \\ &= \langle\, (\sqrt{\phi^*\phi})(v) \mid (\sqrt{\phi^*\phi})(v)\,\rangle = \\ &= \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|^2. \end{aligned}$$

Stąd $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Idea dowodu: określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem:

$$\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v).$$

oraz pokazujemy, że ϕ_1 da się rozszerzyć do przekształcenia unitarnego (odp. izometrii) ψ takiej, że: $\phi = \psi\sqrt{\phi^*\phi}$ (idea jak w tw. Witta o przedłużaniu).

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Po pierwsze ψ_1 jest dobrze określone. Biorąc $v_1, v_2 \in V$ takie, że $\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) = \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)$ mamy:

$$\|\psi_1(v) - \psi_2(v)\| = \|\phi(v_1) - \phi(v_2)\| = \|\phi(v_1 - v_2)\| =$$
$$= \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1 - v_2)\| = \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) - \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)\| = 0$$

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Po pierwsze ψ_1 jest dobrze określone. Biorąc $v_1, v_2 \in V$ takie, że $\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) = \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)$ mamy:
$$\|\psi_1(v) - \psi_2(v)\| = \|\phi(v_1) - \phi(v_2)\| = \|\phi(v_1 - v_2)\| =$$
$$= \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1 - v_2)\| = \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) - \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)\| = 0$$
- Oczywiście ψ_1 jest liniowe. Mamy też $\|\psi_1(u)\| = \|u\|$, dla $u \in \mathrm{im}\sqrt{\phi^*\phi}$. Stąd ψ_1 to monomorfizm. Zatem z twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy: $\dim\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) = \dim\mathrm{im}\,\phi$, co implikuje $\dim(\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}))^\perp = \dim(\mathrm{im}\,\phi)^\perp$.

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Po pierwsze ψ_1 jest dobrze określone. Biorąc $v_1, v_2 \in V$ takie, że $\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) = \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)$ mamy:

$$\|\psi_1(v) - \psi_2(v)\| = \|\phi(v_1) - \phi(v_2)\| = \|\phi(v_1 - v_2)\| =$$
$$= \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1 - v_2)\| = \|\sqrt{\phi^*\phi}(v_1) - \sqrt{\phi^*\phi}(v_2)\| = 0$$

- Oczywiście ψ_1 jest liniowe. Mamy też $\|\psi_1(u)\| = \|u\|$, dla $u \in \mathrm{im}\sqrt{\phi^*\phi}$. Stąd ψ_1 to monomorfizm. Zatem z twierdzenia o sumie wymiarów jądra i obrazu mamy: $\dim\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) = \dim\mathrm{im}\,\phi$, co implikuje $\dim(\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}))^\perp = \dim(\mathrm{im}\,\phi)^\perp$.

- Niech $e_1, \ldots, e_m$ oraz $f_1, \ldots, f_m$ to bazy ortonormalne odpowiednio $(\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}))^\perp$ oraz $(\mathrm{im}\,\phi)^\perp$. Definiujemy $\psi_2 : (\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}))^\perp \to (\mathrm{im}\,\phi)^\perp$ wzorem:

$$\psi_2(a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m) = a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m.$$

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Określamy ψ nad V tak, by równało się ψ_1 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz ψ_2 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$. Dla każdego $v \in V$ mamy:
$$\psi((\sqrt{\phi^*\phi})v) = \psi_1((\sqrt{\phi^*\phi})(v)) = \phi(v) \Rightarrow \phi = \psi\sqrt{\psi^*\psi}.$$

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Określamy ψ nad V tak, by równało się ψ_1 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz ψ_2 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$. Dla każdego $v \in V$ mamy:
$$\psi((\sqrt{\phi^*\phi})v) = \psi_1((\sqrt{\phi^*\phi})(v)) = \phi(v) \Rightarrow \phi = \psi\sqrt{\psi^*\psi}.$$
- Pozostaje pokazać, że ψ to izometria.

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Określamy ψ nad V tak, by równało się ψ_1 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz ψ_2 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$. Dla każdego $v \in V$ mamy:
$$\psi((\sqrt{\phi^*\phi})v) = \psi_1((\sqrt{\phi^*\phi})(v)) = \phi(v) \Rightarrow \phi = \psi\sqrt{\psi^*\psi}.$$
- Pozostaje pokazać, że ψ to izometria.
- Jeśli $v = u + w$, gdzie $u \in \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz $w \in \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$, to $\psi_1(u) \perp \psi_2(w)$.

Niech ϕ – endomorfizm V. Mamy $\|\phi(v)\| = \|(\sqrt{\phi^*\phi})(v)\|$, dla $v \in V$.

Określamy $\psi_1 : \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi}) \to \mathrm{im}(\phi)$ wzorem $\psi_1(\sqrt{\phi^*\phi}(v)) = \phi(v)$.

- Określamy ψ nad V tak, by równało się ψ_1 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz ψ_2 na $\mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$. Dla każdego $v \in V$ mamy:
$$\psi((\sqrt{\phi^*\phi})v) = \psi_1((\sqrt{\phi^*\phi})(v)) = \phi(v) \Rightarrow \phi = \psi\sqrt{\psi^*\psi}.$$
- Pozostaje pokazać, że ψ to izometria.
- Jeśli $v = u + w$, gdzie $u \in \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})$ oraz $w \in \mathrm{im}(\sqrt{\phi^*\phi})^\perp$, to $\psi_1(u) \perp \psi_2(w)$.
- Zatem z twierdzenia Pitagorasa:
$$\|\psi(v)\|^2 = \|\psi_1 u + \psi_2(w)\|^2 = \|\psi_1(u)\|^2 + \|\psi_2(w)\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2$$
co kończy dowód twierdzenia o rozkładzie biegunowym.

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. **Wartościami osobliwymi** ϕ nazywamy wartości własne endomorfizmu $\sqrt{\phi^*\phi}$, przy czym wartość osobliwa λ występuje z krotnością $\dim\ker(\sqrt{\phi^*\phi} - \lambda\,\mathrm{id})$. Są to liczby nieujemne (bo operator $\sqrt{\phi^*\phi}$ jest dodatnio półokreślony).

Definicja

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni unitarnej $(V, \langle \mid \rangle)$. **Wartościami osobliwymi** ϕ nazywamy wartości własne endomorfizmu $\sqrt{\phi^*\phi}$, przy czym wartość osobliwa λ występuje z krotnością $\dim\ker(\sqrt{\phi^*\phi} - \lambda\,\mathrm{id})$. Są to liczby nieujemne (bo operator $\sqrt{\phi^*\phi}$ jest dodatnio półokreślony).

Uwaga: wartości osobliwe można wyznaczać także dla przekształceń liniowych (czy ich macierzy) pomiędzy przestrzeniami różnych wymiarów. Np. biorąc:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

wyznaczamy wartości własne A^TA (macierz ϕ^*, jeśli macierz ϕ to A) postaci:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix},$$

zaś wartości osobliwe A to ich pierwiastki: $\sigma_1 = 6\sqrt{10}, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{10}, \quad \sigma_3 = 0.$

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych (SVD decomposition)

Niech $\phi : (V, \langle \mid \rangle_1) \to (W, \langle \mid \rangle_2)$ będzie przekształceniem liniowym o **niezerowych** wartościach osobliwych $s_1, \ldots, s_n$. Istnieją wówczas bazy ortonormalne $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n).$$

Innymi słowy, jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$, to istnieją macierze unitarne P, Q takie, że:

$$A = P\Sigma Q,$$

gdzie $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ma na przekątnej[a] niezerowe wartości osobliwe A.

[a] Oznaczenie diag stosujemy tu też dla macierzy niekwadratowej opisując jedyne jej niezerowe wyrazy stojące na przecieciu i-tego wiersza i i-tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz Σ.

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych (SVD decomposition)

Niech $\phi : (V, \langle \mid \rangle_1) \to (W, \langle \mid \rangle_2)$ będzie przekształceniem liniowym o **niezerowych** wartościach osobliwych $s_1, \ldots, s_n$. Istnieją wówczas bazy ortonormalne $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$.
Innymi słowy, jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$, to istnieją macierze unitarne P, Q takie, że:

$$A = P\Sigma Q,$$

gdzie $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ma na przekątnej[a] niezerowe wartości osobliwe A.

[a] Oznaczenie diag stosujemy tu też dla macierzy niekwadratowej opisując jedyne jej niezerowe wyrazy stojące na przecieciu i-tego wiersza i i-tej kolumny macierzy $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz Σ.

Np.
$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T .$$

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych (SVD decomposition)

Niech $\phi : (V, \langle\ |\ \rangle_1) \to (W, \langle\ |\ \rangle_2)$ będzie przekształceniem liniowym o **niezerowych** wartościach osobliwych $s_1, \ldots, s_n$. Istnieją wówczas bazy ortonormalne $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$. Innymi słowy, jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$, to istnieją macierze unitarne P, Q takie, że $A = P\Sigma Q$, gdzie $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ma na przekątnej niezerowe wartości osobliwe A.

Dowód dla $\phi \in \mathrm{End}((V, \langle\ |\ \rangle))$. Z rozkładu biegunowego dobierz p-nie unitarne ψ takie, że $\phi = \psi\sqrt{\phi^*\phi}$. Korzystając z twierdzenia spektralnego weź ortonormalną bazę V postaci $e_1, \ldots, e_n$, że $\sqrt{\phi^*\phi}(e_j) = s_j e_j$. Niech $f_i = \psi(e_j)$ (b. ortonormalna).

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych (SVD decomposition)

Niech $\phi : (V, \langle \mid \rangle_1) \to (W, \langle \mid \rangle_2)$ będzie przekształceniem liniowym o **niezerowych** wartościach osobliwych $s_1, \ldots, s_n$. Istnieją wówczas bazy ortonormalne $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni V takie, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$. Innymi słowy, jeśli $A \in M_n(\mathbb{C})$, to istnieją macierze unitarne P, Q takie, że $A = P\Sigma Q$, gdzie $\Sigma = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ ma na przekątnej niezerowe wartości osobliwe A.

Dowód dla $\phi \in \mathrm{End}((V, \langle \mid \rangle))$. Z rozkładu biegunowego dobierz p-nie unitarne ψ takie, że $\phi = \psi\sqrt{\phi^*\phi}$. Korzystając z twierdzenia spektralnego weź ortonormalną bazę V postaci $e_1, \ldots, e_n$, że $\sqrt{\phi^*\phi}(e_j) = s_j e_j$. Niech $f_i = \psi(e_j)$ (b. ortonormalna).

Rozkładamy $v \in V$ w bazie: $v = \langle v \mid e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle v \mid e_n \rangle e_n$, i dalej:

$$\phi(v) = \psi\left((\sqrt{\phi^*\phi})(\langle v \mid e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle v \mid e_n \rangle e_n)\right) =$$
$$= s_1 \langle v \mid e_1 \rangle \psi(e_1) + \ldots + s_n \langle v \mid e_n \rangle e_n =$$
$$= s_1 \langle v \mid e_1 \rangle f_1 + \ldots + s_n \langle v \mid e_n \rangle f_n.$$

Twierdzenie o rozkładzie według wartości osobliwych ma niezliczone zastosowania, poniżej kilka ciekawych odnośników.

- SVD wytłumaczony wizualnie i kompresja obrazów (świetny film!):
  `https://youtu.be/DG7YTlGnCEo`
- metody numeryczne (rozwiązywanie układów, pseudoodwrotność, metoda najmn. kwadratów):
  `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum19/wyklad05.pdf`
- przeszukiwanie tekstów (ukryte indeksowanie semantyczne):
  `http://osilek.mimuw.edu.pl/images/e/ea/ED-4.2-m13-1.01.pdf`
- rozpoznawanie twarzy, data-mining w polityce, kryształy itd.
  `https://people.maths.ox.ac.uk/porterm/papers/s4.pdf`

* * *

Materiału jest tu na roczny wykład (który to już raz to stwierdzamy?!).