Geometria z Algebrą Liniową II*

Arkadiusz Męcel

WYKŁAD 12, 20.04.2021 r.

Ostatnio: izometrie przestrzeni euklidesowej, twierdzenie Cartana, skończone grupy symetrii w $\mathbb{R}^n$. Dziś: sprzężenie endomorfizmu i twierdzenie spektralne.

Jeśli ϕ jest izometrią przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \,\rangle)$, to dla każdych $v, w \in V$:

$$\langle\, v, w\,\rangle = \langle\, \phi(v), \phi(w)\,\rangle \Rightarrow \langle\, \phi^{-1}(v), w\,\rangle = \langle\, v, \phi(w)\,\rangle.$$

Pytania:

- Co możemy powiedzieć o parze $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ spełniającej:
$$\langle\, \phi(w), v\,\rangle = \langle\, w, \psi(v)\,\rangle?$$
- Co możemy powiedzieć o $\phi \in \mathrm{End}(V)$ spełniającym
$$\langle\, \phi(v), w\,\rangle = \langle\, v, \phi(w)\,\rangle?$$

Nasze cele:
diagonalizacja rzeczywistych macierzy symetrycznych,
opis wartości własnych takich macierzy.

Ostatnio: izometrie przestrzeni euklidesowej, twierdzenie Cartana, skończone grupy symetrii w $\mathbb{R}^n$. Dziś: sprzężenie endomorfizmu i twierdzenie spektralne.

Fakt

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $f : V \to K$ określone wzorem

$$f_v(u) = h(u, v), \text{ gdzie } u \in V$$

jest funkcjonałem, czyli $f_v \in V^*$.

Ostatnio: izometrie przestrzeni euklidesowej, twierdzenie Cartana, skończone grupy symetrii w $\mathbb{R}^n$. Dziś: sprzężenie endomorfizmu i twierdzenie spektralne.

Fakt

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $f : V \to K$ określone wzorem

$$f_v(u) = h(u, v), \text{ gdzie } u \in V$$

jest funkcjonałem, czyli $f_v \in V^*$.

Dowód:

- Oczywiście dla dowolnych $u_1, u_2 \in V$ mamy:

$$f_v(u_1 + u_2) = \langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = f_v(u_1) + f_v(u_2),$$

Ostatnio: izometrie przestrzeni euklidesowej, twierdzenie Cartana, skończone grupy symetrii w $\mathbb{R}^n$. Dziś: sprzężenie endomorfizmu i twierdzenie spektralne.

Fakt

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $f : V \to K$ określone wzorem

$$f_v(u) = h(u, v), \text{ gdzie } u \in V$$

jest funkcjonałem, czyli $f_v \in V^*$.

Dowód:

- Oczywiście dla dowolnych $u_1, u_2 \in V$ mamy:
$$f_v(u_1 + u_2) = \langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = f_v(u_1) + f_v(u_2),$$
- oraz dla każdego $u \in V$ oraz $a \in K$ mamy:
$$f_v(au) = \langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle = a \cdot f_v(u).$$

Fakt

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Dla każdego $v \in V$ funkcjonał $f : V \to K$ określony jest wzorem

$$f_v(u) = h(u, v), \text{ gdzie } u \in V.$$

Wówczas odwzorowanie $\Phi : V \to V^*$ zadane wzorem $\Phi(v) = f_v$ jest liniowe oraz następujące warunki są równoważne:

(a) (V, h) jest nieosobliwa,

(b) Φ jest izomorfizmem.

Fakt

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Dla każdego $v \in V$ funkcjonał $f : V \to K$ określony jest wzorem

$$f_v(u) = h(u, v), \text{ gdzie } u \in V.$$

Wówczas odwzorowanie $\Phi : V \to V^*$ zadane wzorem $\Phi(v) = f_v$ jest liniowe oraz następujące warunki są równoważne:

(a) (V, h) jest nieosobliwa,

(b) Φ jest izomorfizmem.

Dowód. Oczywiście Φ jest liniowe. Co więcej

$$\ker \Phi = \{v \in V \mid f_v(x) = 0\} = \{v \in V \mid h(x, v) = 0, \forall_x\} = V^{\perp}.$$

Zatem teza wynika z faktu, że $\dim V = \dim V^*$.

Wniosek

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ będzie dualną do $\mathcal{A}$ bazą V^*. Wówczas $M(\Phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*} = G(h, \mathcal{A})$.

Wniosek

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ będzie dualną do $\mathcal{A}$ bazą V^*. Wówczas $M(\Phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*} = G(h, \mathcal{A})$.

Dowód: współrzędne funkcjonału $\Phi(\alpha_j) = f_{\alpha_j}$ w bazie dualnej $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ to wartości tego funkcjonału na elementach $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, czyli $f_{\alpha_j}(\alpha_i) = h(\alpha_i, \alpha_j)$. Zatem

$$\Phi(\alpha_j) = h(\alpha_1, \alpha_j) \cdot \alpha_1^* + \ldots + h(\alpha_n, \alpha_j) \cdot \alpha_n^*.$$

Wniosek

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ będzie dualną do $\mathcal{A}$ bazą V^*. Wówczas $M(\Phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*} = G(h, \mathcal{A})$.

Dowód: współrzędne funkcjonału $\Phi(\alpha_j) = f_{\alpha_j}$ w bazie dualnej $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ to wartości tego funkcjonału na elementach $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, czyli $f_{\alpha_j}(\alpha_i) = h(\alpha_i, \alpha_j)$. Zatem

$$\Phi(\alpha_j) = h(\alpha_1, \alpha_j) \cdot \alpha_1^* + \ldots + h(\alpha_n, \alpha_j) \cdot \alpha_n^*.$$

Uwaga.

- Niech $\phi : V \to V$. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieje $v' \in V$ taki, że

$$\phi^*(f_v) = f_{v'}.$$

Wniosek

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ będzie dualną do $\mathcal{A}$ bazą V^*. Wówczas $M(\Phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*} = G(h, \mathcal{A})$.

Dowód: współrzędne funkcjonału $\Phi(\alpha_j) = f_{\alpha_j}$ w bazie dualnej $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ to wartości tego funkcjonału na elementach $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, czyli $f_{\alpha_j}(\alpha_i) = h(\alpha_i, \alpha_j)$. Zatem

$$\Phi(\alpha_j) = h(\alpha_1, \alpha_j) \cdot \alpha_1^* + \ldots + h(\alpha_n, \alpha_j) \cdot \alpha_n^*.$$

Uwaga.

- Niech $\phi : V \to V$. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieje $v' \in V$ taki, że

$$\phi^*(f_v) = f_{v'}.$$

- Zatem dla każdego $u \in V$ mamy: $\phi^*(f_v)(u) = f_v(\phi(u)) = f_{v'}(u)$.

Wniosek

Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\mathcal{A}^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ będzie dualną do $\mathcal{A}$ bazą V^*. Wówczas $M(\Phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*} = G(h, \mathcal{A})$.

Dowód: współrzędne funkcjonału $\Phi(\alpha_j) = f_{\alpha_j}$ w bazie dualnej $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ to wartości tego funkcjonału na elementach $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, czyli $f_{\alpha_j}(\alpha_i) = h(\alpha_i, \alpha_j)$. Zatem

$$\Phi(\alpha_j) = h(\alpha_1, \alpha_j) \cdot \alpha_1^* + \ldots + h(\alpha_n, \alpha_j) \cdot \alpha_n^*.$$

Uwaga.

- Niech $\phi : V \to V$. Wówczas dla każdego $v \in V$ istnieje $v' \in V$ taki, że

$$\phi^*(f_v) = f_{v'}.$$

- Zatem dla każdego $u \in V$ mamy: $\phi^*(f_v)(u) = f_v(\phi(u)) = f_{v'}(u)$.
- A zatem $h(\phi(u), v) = h(u, v')$.

Definicja-uwaga

Dla każdego endomorfizmu ϕ nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) istnieje dokładnie jeden endomorfizm ϕ^* przestrzeni V spełniający warunek

$$h(\phi(u), v) = h(u, \phi^*(v)).$$

nazywany **endomorfizmem sprzężonym** do endomorfizmu ϕ przestrzeni (V, h).

Definicja-uwaga

Dla każdego endomorfizmu ϕ nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) istnieje dokładnie jeden endomorfizm ϕ^* przestrzeni V spełniający warunek

$$h(\phi(u), v) = h(u, \phi^*(v)).$$

nazywany **endomorfizmem sprzężonym** do endomorfizmu ϕ przestrzeni (V, h).

Oczywiście dla dowolnych $v, x, y \in V$ oraz $a, b \in K$ mamy:

$$\begin{aligned} h(v, \phi^*(ax + by)) &= h(\phi(v), ax + by) = \\ &= a \cdot h(\phi(v), x) + b \cdot h(\phi(v), y) = \\ &= a \cdot h(v, \phi^*(x)) + b \cdot h(v, \phi^*(y)) = \\ &= h(v, a\phi^*(x) + b\phi^*(y)). \end{aligned}$$

Skoro V jest nieosobliwa, to $\phi^*(ax + by) = a\phi^*(x) + b\phi^*(y)$.
(inaczej dla każdego v mamy $h(v, w - z) = 0$, dla $w - z \neq 0$).

Definicja-uwaga

Dla każdego endomorfizmu ϕ nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) istnieje dokładnie jeden endomorfizm ϕ^* przestrzeni V spełniający warunek

$$h(\phi(u), v) = h(u, \phi^*(v)).$$

nazywany **endomorfizmem sprzężonym** do endomorfizmu ϕ przestrzeni (V, h).

Uwaga

Dla nieosobliwej przestrzeni dwuliniowej (V, h) oraz $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ i $a \in K$ mamy:

$$(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*, \quad (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*, \quad (a\phi)^* = a\phi^*,$$

a także $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$ oraz $(\phi^*)^* = \phi$.

Fakt

Niech (V, h) – nieosobliwa. Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą ortonormalną V, czyli $\alpha_i \perp \alpha_j$, dla $i \neq j$ oraz $h(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, to

$$M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^T.$$

Fakt

Niech (V, h) – nieosobliwa. Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą ortonormalną V, czyli $\alpha_i \perp \alpha_j$, dla $i \neq j$ oraz $h(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, to

$$M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^T.$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = [b_{ij}]$ oraz $M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = [c_{ij}]$.

Fakt

Niech (V, h) – nieosobliwa. Jeśli $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą ortonormalną V, czyli $\alpha_i \perp \alpha_j$, dla $i \neq j$ oraz $h(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, to

$$M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})^T.$$

Dowód.

- Niech $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = [b_{ij}]$ oraz $M(\phi^*)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = [c_{ij}]$.
- Dla każdych α_i, α_j z bazy $\mathcal{A}$ mamy:

$$h(\alpha_i, \phi(\alpha_j)) = h\left(\alpha_i, \sum_{s=1}^{n} b_{sj}\alpha_s\right) = \sum_{s=1}^{n} b_{sj} \cdot h(\alpha_i, \alpha_s) = b_{ij},$$
$$h(\phi^*(\alpha_i), \alpha_j) = h\left(\sum_{s=1}^{n} c_{si}\alpha_s, \alpha_j\right) = \sum_{s=1}^{n} c_{si} \cdot h(\alpha_s, \alpha_j) = c_{ji}.$$

Definicja

Niech $(V, \langle\, , \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową. Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ jest **samosprzężone**, jeśli $\phi = \phi^*$, czyli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ zachodzi równość $\langle\, \alpha, \phi(\beta)\, \rangle = \langle\, \phi(\alpha), \beta\, \rangle$.

Uwaga

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, , \rangle)$ Jeśli $\mathcal{A}$ jest ortonormalna, to następujące warunki są równoważne:

- $\phi : V \to V$ jest samosprzężone,
- $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą symetryczną.

Definicja

Niech $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową. Mówimy, że przekształcenie liniowe $\phi : V \to V$ jest **samosprzężone**, jeśli $\phi = \phi^*$, czyli dla każdych $\alpha, \beta \in V$ zachodzi równość $\langle\, \alpha, \phi(\beta)\, \rangle = \langle\, \phi(\alpha), \beta\, \rangle$.

Uwaga

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ Jeśli $\mathcal{A}$ jest ortonormalna, to następujące warunki są równoważne:

- $\phi : V \to V$ jest samosprzężone,
- $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą symetryczną.

Wniosek

Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ diagonalizowalnym w pewnej bazie ortonormalnej, to ϕ jest samosprzężony.

Twierdzenie spektralne

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V. Wtedy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

Twierdzenie spektralne

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V. Wtedy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

Plan dowodu.

- Jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna, to $w_A(\lambda)$ ma n pierwiastków,
- Jeśli $W \subseteq V$ jest ϕ-niezmiennicza, to $W^\perp$ też.
- Jeśli $a \neq b$ to wartości własne ϕ, to $V_{(a)} \perp V_{(b)}$.
- Indukcja...

Twierdzenie spektralne

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V. Wtedy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

Plan dowodu.

- Jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna, to $w_A(\lambda)$ ma n pierwiastków.
- Jeśli $W \subseteq V$ jest ϕ-niezmiennicza, to $W^\perp$ też.
- Jeśli $a \neq b$ to wartości własne ϕ, to $V_{(a)} \perp V_{(b)}$.
- Indukcja...

Wniosek

Każda macierz symetryczna $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$. Co więcej istnieje macierz ortogonalna C taka, że macierz $C^T AC = C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Twierdzenie spektralne

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V. Wtedy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

Plan dowodu.

- Jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna, to $w_A(\lambda)$ ma n pierwiastków.
- Jeśli $W \subseteq V$ jest ϕ-niezmiennicza, to $W^\perp$ też.
- Jeśli $a \neq b$ to wartości własne ϕ, to $V_{(a)} \perp V_{(b)}$.
- Indukcja...

Inny wniosek

Każda macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podobna do macierzy symetrycznej.

Twierdzenie spektralne

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V. Wtedy istnieje baza ortonormalna przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

Plan dowodu.

- Jeśli $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna, to $w_A(\lambda)$ ma n pierwiastków.
- Jeśli $W \subseteq V$ jest ϕ-niezmiennicza, to $W^\perp$ też.
- Jeśli $a \neq b$ to wartości własne ϕ, to $V_{(a)} \perp V_{(b)}$.
- Indukcja...

Uwaga. Poniższa symetryczna macierz zespolona nie jest diagonalizowalna:

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

(ale następnym razem naprawimy ten problem).

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.
- Zatem:

$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.
- Zatem:
$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$
- Czyli dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = cz_i$.

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.
- Zatem:
$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$
- Czyli dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = cz_i$.
- Mnożymy i-tą równość (wypisaną wyżej) przez $\overline{z_i}$ i otrzymujemy równości:
$$a_{i1}z_1\overline{z_i} + \ldots + a_{in}z_n\overline{z_i} = cz_i\overline{z_i} = c|z_i|^2.$$

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.
- Zatem:

$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

- Czyli dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = cz_i$.
- Mnożymy i-tą równość (wypisaną wyżej) przez $\overline{z_i}$ i otrzymujemy równości:

$$a_{i1}z_1\overline{z_i} + \ldots + a_{in}z_n\overline{z_i} = cz_i\overline{z_i} = c|z_i|^2.$$

- Dodajemy te równości, dla $i = 1, \ldots, n$. Korzystając z $a_{ij} = a_{ji}$ mamy:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_j\overline{z_i} = a_{11}|z_1|^2 + \ldots + a_{nn}|z_n|^2 + \sum_{i<j} a_{ij}(z_j\overline{z_i} + z_i\overline{z_j}) = c(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2).$$

Dowód cz. 1. Macierz symetryczna $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n wartości własnych.

- Traktujemy macierz $A = [a_{ij}]$ jako macierz z przestrzeni $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Niech $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ będzie wektorem własnym macierzy A o wartości własnej $c \in \mathbb{C}$.
- Zatem:

$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}z_1 + \ldots + a_{1n}z_n \\ \vdots \\ a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

- Czyli dla $i = 1, 2, \ldots, n$ mamy $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = cz_i$.
- Mnożymy i-tą równość (wypisaną wyżej) przez $\overline{z_i}$ i otrzymujemy równości:

$$a_{i1}z_1\overline{z_i} + \ldots + a_{in}z_n\overline{z_i} = cz_i\overline{z_i} = c|z_i|^2.$$

- Dodajemy te równości, dla $i = 1, \ldots, n$. Korzystając z $a_{ij} = a_{ji}$ mamy:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}z_j\overline{z_i} = a_{11}|z_1|^2 + \ldots + a_{nn}|z_n|^2 + \sum_{i<j} a_{ij}(z_j\overline{z_i} + z_i\overline{z_j}) = c(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2).$$

- Skoro $z \neq 0$, to $c \in \mathbb{R}$.

Dowód cz. 2. Podprzestrzenie niezmiennicze i własne, gdy ϕ–samosprzężony.

- Niech W będzie ϕ-niezmiennicza i niech $v \in W^{\perp}$.

Dowód cz. 2. Podprzestrzenie niezmiennicze i własne, gdy ϕ–samosprzężony.

- Niech W będzie ϕ-niezmiennicza i niech $v \in W^{\perp}$.
- Wówczas dla dowolnego $w \in W$ mamy
$$0 = \langle\, v, \phi(w)\,\rangle = \langle\, \phi(v), w\,\rangle,$$
czyli także $\phi(v) \in W^{\perp}$.

Dowód cz. 2. Podprzestrzenie niezmiennicze i własne, gdy ϕ–samosprzężony.

- Niech W będzie ϕ-niezmiennicza i niech $v \in W^{\perp}$.
- Wówczas dla dowolnego $w \in W$ mamy
$$0 = \langle\, v, \phi(w)\,\rangle = \langle\, \phi(v), w\,\rangle,$$
czyli także $\phi(v) \in W^{\perp}$.
- Niech $\phi(\alpha) = a\alpha$ oraz $\phi(\beta) = b\beta$, dla pewnych $a \neq b$.

Dowód cz. 2. Podprzestrzenie niezmiennicze i własne, gdy ϕ–samosprzężony.

- Niech W będzie ϕ-niezmiennicza i niech $v \in W^{\perp}$.
- Wówczas dla dowolnego $w \in W$ mamy
$$0 = \langle\, v, \phi(w)\,\rangle = \langle\, \phi(v), w\,\rangle,$$
czyli także $\phi(v) \in W^{\perp}$.
- Niech $\phi(\alpha) = a\alpha$ oraz $\phi(\beta) = b\beta$, dla pewnych $a \neq b$.
- Wówczas:
$$a\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = \langle\, a\alpha, \beta\,\rangle = \langle\, \phi(\alpha), \beta\,\rangle = \langle\, \alpha, \phi(\beta)\,\rangle = \langle\, \alpha, b\beta\,\rangle = b\langle\, \alpha, \beta\,\rangle.$$
Stąd $(a - b)\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = 0$, czyli $\langle\, \alpha, \beta\,\rangle = 0$.

Dowód cz. 3. Istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

- Dowód jest indukcją po $n = \dim V$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.

Dowód cz. 3. Istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle\, , \,\rangle)$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

- Dowód jest indukcją po $n = \dim V$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, , \,\rangle)$.
- Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma rzeczywistą wartość własną c. Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem własnym ϕ o wartości własnej c. Wiemy, że $\phi(\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.

Dowód cz. 3. Istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle\,,\,\rangle)$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

- Dowód jest indukcją po $n = \dim V$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\,,\,\rangle)$.

- Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma rzeczywistą wartość własną c. Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem własnym ϕ o wartości własnej c. Wiemy, że $\phi(\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}$.

- Zatem $\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^{\perp}}$ jest samosprzężone.

Dowód cz. 3. Istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

- Dowód jest indukcją po $n = \dim V$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.
- Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma rzeczywistą wartość własną c. Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem własnym ϕ o wartości własnej c. Wiemy, że $\phi(\mathrm{lin}(\alpha)^\perp) \subseteq \mathrm{lin}(\alpha)^\perp$.
- Zatem $\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp}$ jest samosprzężone.
- Z zał. indukcyjnego istnieje baza ortonomalna $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ w $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$ złożona z wektorów własnych przekształcenia $\phi|_{\mathrm{lin}(\alpha)^\perp}$. Są to też wektory własne ϕ.

Dowód cz. 3. Istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(V, \langle\,,\,\rangle)$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu ϕ.

- Dowód jest indukcją po $n = \dim V$. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy jego prawdziwość dla $n - 1$. Niech $\dim V = n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\,,\,\rangle)$.
- Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ma rzeczywistą wartość własną c. Niech $\alpha \in V$ będzie wektorem własnym ϕ o wartości własnej c. Wiemy, że $\phi(\text{lin}(\alpha)^{\perp}) \subseteq \text{lin}(\alpha)^{\perp}$.
- Zatem $\phi|_{\text{lin}(\alpha)^{\perp}}$ jest samosprzężone.
- Z zał. indukcyjnego istnieje baza ortonomalna $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ w $\text{lin}(\alpha)^{\perp}$ złożona z wektorów własnych przekształcenia $\phi|_{\text{lin}(\alpha)^{\perp}}$. Są to też wektory własne ϕ.
- Dopełniamy ten układ prostopadły do bazy ortonormalnej $(V, \langle\,,\,\rangle)$ znormalizowanym wektorem $\alpha_1 = \frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest szukaną bazą ortonormalną $(V, \langle\,,\,\rangle)$.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, , \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, , \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, ,\, \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, ,\, \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, , \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, , \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, , \rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.
- Macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest symetryczna, więc ϕ jest samosprzężone.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, , \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, , \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, , \rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.
- Macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest symetryczna, więc ϕ jest samosprzężone.
- Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ w $(V, \langle\, , \rangle)$ złożona z wektorów własnych ϕ.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\,,\,\rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\,,\,\rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\,,\,\rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.
- Macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest symetryczna, więc ϕ jest samosprzężone.
- Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ w $(V, \langle\,,\,\rangle)$ złożona z wektorów własnych ϕ.
- Stąd $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna, tzn. $C^T = C^{-1}$.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, , \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, , \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, , \rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.
- Macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest symetryczna, więc ϕ jest samosprzężone.
- Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ w $(V, \langle\, , \rangle)$ złożona z wektorów własnych ϕ.
- Stąd $C = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna, tzn. $C^T = C^{-1}$.
- Zatem $G(h, \mathcal{A}) = C^T G(h, \mathcal{B}) C = C^{-1} M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} C = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Wniosek 1 - diagonalizacja form dwuliniowych

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$. Wówczas dla każdego iloczynu skalarnego $\langle\, , \rangle$ na V istnieje taka baza ortonormalna $(V, \langle\, , \rangle)$, które jest też bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h).

Dowód.

- Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną $(V, \langle\, , \rangle)$ i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$ będzie zadane warunkiem $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = G(h, \mathcal{B})$.
- Macierz $G(h, \mathcal{B})$ jest symetryczna, więc ϕ jest samosprzężone.
- Istnieje baza ortonormalna $\mathcal{A}$ w $(V, \langle\, , \rangle)$ złożona z wektorów własnych ϕ.
- Stąd $C = M(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ jest ortogonalna, tzn. $C^T = C^{-1}$.
- Zatem $G(h, \mathcal{A}) = C^T G(h, \mathcal{B}) C = C^{-1} M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} C = M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$.
- Skoro $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = G(h, \mathcal{A})$ jest diagonalna, to $\mathcal{A}$ jest bazą prostopadłą (V, h).

Wniosek 2 - największa wartość własna, przypadek symetryczny

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną. Dla $\alpha \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\alpha\|$ oznacza normę wektora przy standardowym iloczynie skalarnym. Niech wartości własne A to $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Wówczas

$$\lambda_1 = \max_{\|\alpha\|=1} \alpha^T A\alpha, \quad \lambda_n = \min_{\|\alpha\|=1} \alpha^T A\alpha.$$

Co więcej, jeśli dla pewnego wektora α mamy $\alpha^T A\alpha = \lambda_i \|\alpha\|^2$, to $A\alpha = \lambda_i \alpha$, gdzie $i = 1, n$.

Wniosek 2 - największa wartość własna, przypadek symetryczny

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną. Dla $\alpha \in \mathbb{R}^n$ niech $\|\alpha\|$ oznacza normę wektora przy standardowym iloczynie skalarnym. Niech wartości własne A to $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Wówczas

$$\lambda_1 = \max_{\|\alpha\|=1} \alpha^T A\alpha, \quad \lambda_n = \min_{\|\alpha\|=1} \alpha^T A\alpha.$$

Co więcej, jeśli dla pewnego wektora α mamy $\alpha^T A\alpha = \lambda_i\|\alpha\|^2$, to $A\alpha = \lambda_i\alpha$, gdzie $i = 1, n$.

Wniosek 3 - nieujemny wektor własny macierzy nieujemnej symetrycznej

Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną o wyrazach nieujemnych i wartościach własnych $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Istnieje wówczas niezerowy wektor $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ taki, że $A\alpha = \lambda_1\alpha$ oraz $a_i \geq 0$, dla wszystkich i.

Dowód Wniosku 2 (tylko dla λ_1, dla λ_n – całkowicie analogicznie).

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{st})$ złożoną z wektorów własnych macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ odpowiadających $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Dowód Wniosku 2 (tylko dla λ_1, dla λ_n – całkowicie analogicznie).

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle_{st})$ złożoną z wektorów własnych macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ odpowiadających $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
- Niech $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$. Wówczas $\|\alpha\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Zatem
$$\alpha^T A\alpha = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda_1\|\alpha\|^2. \qquad (*)$$
Z drugiej strony $\alpha_1^T A\alpha_1 = \lambda_1\|\alpha_1\|^2$, co daje pierwszą część tezy.

Dowód Wniosku 2 (tylko dla λ_1, dla λ_n – całkowicie analogicznie).

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_{st})$ złożoną z wektorów własnych macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ odpowiadających $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
- Niech $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$. Wówczas $\|\alpha\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Zatem

$$\alpha^T A\alpha = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda_1\|\alpha\|^2. \qquad (*)$$

  Z drugiej strony $\alpha_1^T A\alpha_1 = \lambda_1\|\alpha_1\|^2$, co daje pierwszą część tezy.
- Jeśli natomiast dla pewnego wektora α mamy $\alpha^T A\alpha = \lambda_1\|\alpha\|^2$, to równość w nierówności $(*)$ dostaniemy tylko, gdy $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, gdzie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \lambda_n$. Stąd $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_k$ i $A\alpha = \lambda_1\alpha$.

Dowód Wniosku 2 (tylko dla λ_1, dla λ_n – całkowicie analogicznie).

- Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_{st})$ złożoną z wektorów własnych macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ odpowiadających $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
- Niech $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n$. Wówczas $\|\alpha\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Zatem
$$\alpha^T A\alpha = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \lambda_1\|\alpha\|^2. \qquad (*)$$
Z drugiej strony $\alpha_1^T A\alpha_1 = \lambda_1\|\alpha_1\|^2$, co daje pierwszą część tezy.
- Jeśli natomiast dla pewnego wektora α mamy $\alpha^T A\alpha = \lambda_1\|\alpha\|^2$, to równość w nierówności $(*)$ dostaniemy tylko, gdy $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, gdzie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \lambda_n$. Stąd $\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_k$ i $A\alpha = \lambda_1\alpha$.

Dowód Wniosku 3.

Niech $\alpha_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ będzie wektorem własnym macierzy symetrycznej A o nieujemnych wyrazach o największej jej wartości własnej λ_1, gdzie $\|\alpha_1\| = 1$. Niech $\alpha = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Wówczas $\|\alpha\| = \|\alpha_1\|$. Skoro A jest nieujemna, to $\alpha^T A\alpha \geq \alpha_1^T A\alpha_1 = \lambda_1$. Zatem z Wniosku 2 mamy $\alpha^T A\alpha = \lambda_1$ oraz $A\alpha = \lambda_1\alpha$.

Jedno z zadań domowych uogólniających poprzedni wynik.

Twierdzenie min-max

Niech ϕ będzie endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{st})$ o wartościach własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_n$. Wówczas

$$\lambda_k = \max_{M \subseteq \mathbb{R}^n, \dim M = k} \quad \min_{x \in M, \|x\| = 1} \langle x, Ax \rangle = \min_{N \subseteq \mathbb{R}^n, \dim N = n-k+1} \quad \max_{x \in N, \|x\| = 1} \langle x, Ax \rangle.$$

Wynik dla dowolnej macierzy rzeczywistej i zespolonej:

Twierdzenie Gershgorina

Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ ma wyrazy a_{ij}. Dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ niech $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ oraz niech $D(a_{ii}, R_i)$ będzie domkniętym kołem o środku w a_{ii} i promieniu R_i. Wówczas każda wartość własna macierzy A leży wewnątrz lub na brzegu przynajmniej jednego z kół $D(a_{ii}, R)$.

Dwa ważne twierdzenia dot. macierzy rzeczywistych. Dowody (elementarne): `https://iuuk.mff.cuni.cz/~rakdver/linalg/lesson15-9.pdf`

Twierdzenie Schura

Jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n rzeczywistych wartości własnych, to $A = Q^T UQ$, dla pewnej górnotrójkątnej macierzy U oraz ortogonalnej macierzy Q.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa

Jeśli macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma wyrazy nieujemne, a dla pewnego n macierz A^n ma same wyrazy dodatnie, to największa jej wartość własna λ ma krotność 1 i jest co do modułu ostro większa od wszystkich pozostałych. Co więcej, istnieje wektor własny macierzy A o wartości własnej λ, który ma jedynie dodatnie współrzędne.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa ma niezliczone zastosowania, między innymi w probabilistyce, układach dynamicznych,, teorii gier, ekonomii, demografii, teorii sieci, kombinatoryce itd. Można o tym zrobić oddzielny semestralny wykład.
My natomiast zmierzamy ku iloczynom hermitowskim i formom kwadratowym.